Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Анисимов А. А. группа 22103

____

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____

подпись

Итоговая оценка:

____

оценка

Петрозаводск – 2022

Содержание

1 Описание работы **3**

2 Результаты работы **4**

2.1 Задание 2 4

2.2 Задание 3 7

1 Описание работы

В процессе работы мы познакомились с инструментом для создания профессиональных документов, а именно LateX. Перед нами были поставлены три задачи, в процессе выполнения которых мы должны были освоить лексику нашего инструмента.

В самом начале нам была предоставлена первая работа, в которой мы должны были освоить наборы, трансляцию и структуру самого документа, в котором мы будем в дальнейшем работать. В этом задании мы настроили документ, после чего добавили абзацы и спец. символы. Вторым заданием нам был предоставлен онлайн-учебник под названием "Краткий курс математического анализа откуда уже мы должны были подготовить три страницы с математическими формулами, символами и ссылками. В последнем задании нам нужно было построить научный график и разместить его в документе, который был написан во время выполнения второго задания.

Материалами для выполнения заданий были предоставлены скринкасты и литературные источники.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

хотя бы уже потому, что оно, вообще говоря, не имеет этого предела(см. (51.37)).

Для того чтобы найти предел (51.38), докажем для сумм Фурье $S_n(x; f)$ справделивость одной асимптотической формулы.

Л е м м а 3 *Если функция f 2π-переодическая и абсолютно интегрируемая на периоде, то*

$$S_n(x; f) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t) dt \tag{51.39}$$

$$S_n(x; f) = \int_{\beta}^{0} D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)] dt. \tag{51.40}$$

С л е д с т и е 1 *Для любого β, $0 < \beta \leq \pi$, и любого $x \in [-\pi, \pi]$ имеет место асимптотическая формула*

$$S_n(x; f) = \int_{\beta}^{0} D_n(t)[f(x+t) + f(x-t)] dt + o(1), x \to \infty \tag{51.41}$$

1. Докажем формулу (51.39):

$$\mathrm{S}_n(x; f) \underset{(51.35)}{=} \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t) dt \underset{u=t-x}{=} \int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(u) f(x+u) du \underset{(51.31)}{=}$$

$$\underset{(51.31)}{=} \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(x+u) du.$$

2. Для доказательства формулы (51.40) разобьем в формуле (51.39) промежуток интегрирования на отрезки $[-\pi, 0]$ и $[0, \pi]$, а затем сделаем в первом интеграле замену переменного $t = -u$:

$$\mathrm{S}_n(x; f) \underset{(51.39)}{=}$$

$$\underset{(51.39)}{=} \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t) dt = \int\limits_{\pi}^{0} D_n(t) f(x+t) dt + \int\limits_{0}^{-\pi} D_n(t) f(x+t) dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{\pi} D_n(-u) f(x-u) du + \int\limits_{0}^{\pi} D_n(t) f(x+t) dt =$$

$$= \int_0^{\pi} D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]dt.$$

(мы воспользовались тем, что $D_n(-u) = D_n(u)$, см. лемму 2, и обозначили u через t. $\lhd$ Докажем теперь следствие, т.е формулу (51.41). $\rhd$ Зафиксируем произвольно β, ли бы выполнялись неравенства $0 < \beta \leq \pi$, а затем разобьем промежуток интегрирования в формуле (51.40) на отрезки $[0, \beta]$ и $[\beta, \pi]$. Тогда, использовав выражение (51.37) для ядра Дирихле, получим

$$S_n(x;f) \underset{\substack{51.40\\51.37}}{=} \int_0^{\delta} D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]dt + \frac{1}{2}\int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{\sin\frac{t}{2}}dt. \tag{51.42}$$

Функция $\frac{1}{sin(t/2)}$ непрерывна на отрезке $[\delta, \pi]$, а функции $f(x+t)$ и $f(x-t)$ как функции переменной t абсолютно интегрируемые на этом отрезке. Поэтому и функция $\frac{f(x+t)+f(x-t)}{\sin\frac{t}{2}}$ абсолютно интегрируема на отрезке $[\delta, \pi]$ (см. замечание в п. 29.5), и, следовательно, согласно теореме Римана (теорема 3 из п. 51.3) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi} \frac{f(x+t)+f(x-t)}{\sin\frac{t}{2}} \sin(n+\frac{1}{2})tdt = 0. \tag{51.43}$$

Формулы (51.42) и (51.43) означают, что имеем место асимптотическое равенство (51.41).$\lhd$

Отметим, что в формуле (51.41) бесконечно малая $o(1)$ зависит от числа β и от точки x (см. (51.43)).

Теорема 4 *(принцип локализации). Если f является 2π-периодической и абсолютно интегрируемой на периоде функцией, то существование передела последовательности её сумм Фурье $S_n(x;f)$, n = 1,2,..., в любой точке $x \in R$ равносильно существованию предела*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]dt. \tag{51.44}$$

где δ, $0 < \delta \leq \pi$, произвольно фиксировано. При этом если указанные пределы существуют, то они равны.

Таким образом, несмотря на то, что коэффициенты ряда Фурье функции определяются с помощью ее значений на всем отрезке $[-\pi, \pi]$(как говорят, на всем периоде), сходимость ее ряда Фурье в любой точке $x \in [-\pi, \pi]$, а в случае сходимости этого ряда его - сумма, зависят только от поведения функции в сколь угодно малой окрестности рассматриваемой точки x.

$\rhd$Действительно, из формулы (51.41) следует, что пределы $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x;f)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^{\delta} D_n(t)[f(x+t)+f(x-t)]dt$ одновременно существуют или нет, а если существуют, то они равны. Предел же указаного интеграла зависит лишь от значений функции на отрезке $[x-\delta, x+\delta]$.

51.5. Сходимость ряда Фурье в точке. Займемся теперь более детальным изученим поведения сумм Фурье $S_n(x;f)$ в зависимости от поведения функции в окрестностях точки x. Предварительно докажем одну лемму.

Лемма 4 *Если функция f абсолютно инегрируема на отрезке* $[0, pi]$ *, то интегралы*

$$51.45 \int_0^{\pi} \frac{|f(t)|}{t} dt, \int_0^{\pi} \frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}} dt \tag{51.45}$$

одновременно сходятся или расходятся.

$\triangleright$ Поскольку функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[0, \pi]$, то существует такое η, $0 \le \eta \le \pi$, что, каково бы ни было ξ, функция f интегрируема по Риману на отрезке $[\xi, \eta]$(см.замечание 1 в п. 51.1). Для исследования сходимости интегралов

$$51.46 \int_0^{\eta} \frac{|f(t)|}{t} dt, \int_0^{\eta} \frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}} dt \tag{51.46}$$

можно применить признак сравнения (см.п.29.3).

Поскольку

$$51.47 \lim_{t \to 0} \frac{2\sin\frac{t}{2}}{t} = 1 \tag{51.47}$$

то подынтегральные функции в интегралах (51.46) эквивалентны при $t \to 0$:

$$51.48 \frac{|f(t)|}{t} \sim \frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}} \tag{51.48}$$

Отсюда следует, что интегралы (51.46) одновременно сходятся или расходятся.

Интегралы (51.45) отличаются от интегралов (51.46) на заведемо сходящиеся интегралы

$$51.49 \int_{\eta}^{\pi} \frac{|f(t)|}{t} dt, \int_{\eta}^{\pi} \frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}} dt \tag{51.49}$$

(их сходимость, см. замечание в п.29.5, следует из того, что если абсолютно интегрируемую на некотором отрезке фукнцию умножить на функцию, интегрируемую по Риману на этом отрезке, то получится снова абсолютно интегрируемая функция; в рассматриваемом случае абсолютно интегрируемая функция f умножается даже на непрерывные отрезки $[\eta; \pi]$ соотвественно функции $\frac{1}{t}$ и $\frac{1}{2\sin(t/2)}$)

2.2 Задание 3

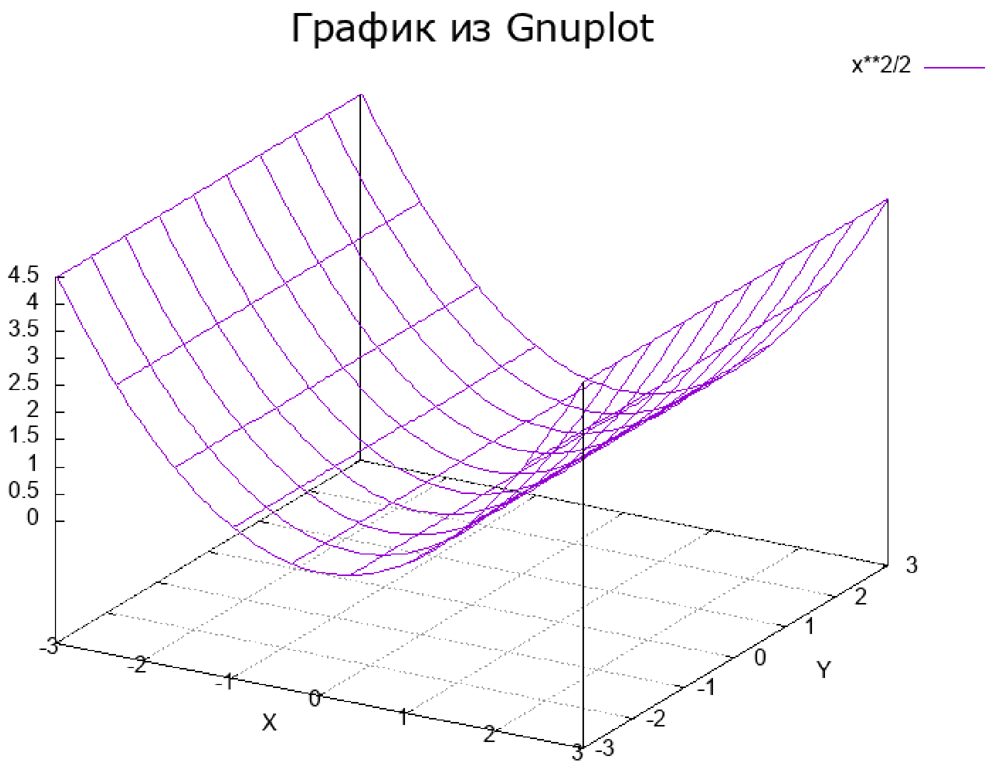

Рис. 1: Эллиптический параболоид