Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнил:
Аксентьев Д. А. группа 22101

____

подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____

подпись

Итоговая оценка:

____

оценка

Петрозаводск – 2022

Содержание

1 Описание работы

В рамках данного курса я познакомился с издательской системой Latex, обучился работе с ней. Основной упор был сделан на набор математических формул, так во втором задании было необходимо переписать математический текст, содержащий множество формул и специальных символов. Это задание помогло мне понять как правильно нужно составлять научный документ в данной среде и какие инструменты для этого необходимы. В третьем задании было необходимо построить график с помощью системы Gnuplot. Думаю приобретенные мной знания будут полезны мне в дальнейшем при написании курсовых работ, либо каких-либо научных статей.

2 Результаты работы

2.1 Задание 2

ный предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$*; то существует и предел* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$*, причем*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{1}$$

$\triangleright$ Доопределим функции f и g в точке $x=a$ по непрерывности, т. е. положим

$$f(a)=g(a)=0. \tag{2}$$

Тогда для любого $x\in(a,b)$ продолженные функции на отрезке $[a,x]$ будут удовлетворять условиям теоремы Коши о среднем значении, и потому будет существовать така точка $\xi=\xi(x), a<\xi<x$, что

$$\frac{f(x)}{g(x)}\underset{(13.4)}{=}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{3}$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to a}\xi(x)=a$ и предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{4}$$

и, следовательно, существует

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\underset{(13.5)}{=}\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\underset{(13.6)}{=}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\triangleleft$$

13.2 Неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема 3. *Если:*

1) *функции f и g дифференцируемы на интервале (a,b);*

2) $g'\neq 0$ для всех $x\in(a,b)$

$$3)\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty; \tag{5}$$

4) *существует конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$*; то существует предел* $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ *и*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{6}$$

$\triangleright$ Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k. \tag{7}$$

Покажем, что при выполнении осатльных условий теоремы

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=k. \tag{8}$$

Если $a < x < x_0 < b$, то на отрезке $[x, x_0]$ функции f и g удовлетворяют условиям теоремы Коши (см. теорему 4 в п. 12.2), а поэтому существует такая точка $\xi = \xi(x_0, x)$, что

$$\frac{f(x) - f(x_0}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\ x < \xi < x_0. \tag{9}$$

Далее, в силу (13.7) существует такая точка $x_1 = x_1(x_0), a < x_1 < x_0$, что при всех $x \in (a, x_1)$ выполняются неравенства

$$\begin{gathered} f(x) \neq 0, \\ g(x) \neq 0, \\ f(x) \neq f(x_0), \end{gathered}$$

и, следовательно, можно производить деление на $f(x), g(x)$ и $1 - \frac{f(x_0}{f(x)}$ (а ткаже и на $1 - \frac{g(x_0}{g(x)}$, поскольку в силу условий теоремы $g(x) \neq g(x_0)$; см. (12.16) в доказательстве теоремы 4 из п.12.2). Для этих значений x из (13.11) вытекает раверство

$$\frac{f(x)}{g(x)} \frac{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

откуда

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}. \tag{10}$$

В правой части равенства первый сомножитель $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ стремится к числу k при $x_0 \to a$ (ибо $a < \xi < x_0$ и поэтому $\lim\limits_{x_0 \to a} \xi = a$), а второй в силу условия (13.7) стремится к 1 при $x \to a$ и фиксированном x_0:

$$\lim_{x \to a} \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} = 1. \tag{11}$$

Непосредственно перейти к пределу в равенстве (13.12) нельзя, так как указанные выше предельные переходы в сомноожителях в правой части равенства происходят при разных условиях: при $x_0 \to a$ и при фиксированном x_0, но $x \to a$. Однако если задать произвольно окрестность $U(k)$ предела k отношения производных (13.9), то можно сначала зафиксировать точку x_0 столь близко к точке a, что отношение $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ попадет в эту окрестность, ибо $a < \xi < x_0$. Согласно же условию (13.13) для всех точек x, достаточно близких к a, отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ (см. (13.12)) также будет принадлежать указнной окрестности $U(k)$, а это означает справедливость утверждения (13.10).

Проведнное рассуждение нетрудно записать с помощью неравенств.
Пусть сначала предел (13.9) конечный. Положим

$$\alpha(x) = \frac{f'(x)}{g'(x)} - k. \tag{12}$$

Тогда из (13.9) будем иметь $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$, и, сделовательно, для любого произвольно фиксированного $\varepsilon > 0$ существует такое x_0, что для всех $x \in (a, x_0)$ выполняется неравенство

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13}$$

Если положить еще

$$\beta(x) = 1 - \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}, \tag{14}$$

то в силу условия (13.7)

$$\lim_{x\to a} \beta(x) = 0. \tag{15}$$

Теперь имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{\substack{(13.12)\\(13.14),(13.16)}}{=} (k + \alpha(\xi))(1 + \beta(x)) = k + \alpha(\xi) + k\beta(x) + \alpha(\xi)\beta(x), \tag{16}$$

$x < \xi < x_0$; при этом в силу (13.17) существует такое $\delta > 0, a < a+\delta < x_0$, что при $x \in (a, a+\delta)$ выполняется неравенство

$$|k\beta(x) + \alpha(\xi)\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{17}$$

В результате получаем, что для всех $x \in (a, a+\delta)$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| \underset{(13.18)}{\le} |\alpha(\xi)| + |k\beta(x) + \alpha(\xi)\beta(x)| \underset{\substack{(13.15)\\(13.19)}}{\le} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а это и означает выполнение равенства (13.10).

Если теперь

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty, \tag{18}$$

2.2 Задание 3