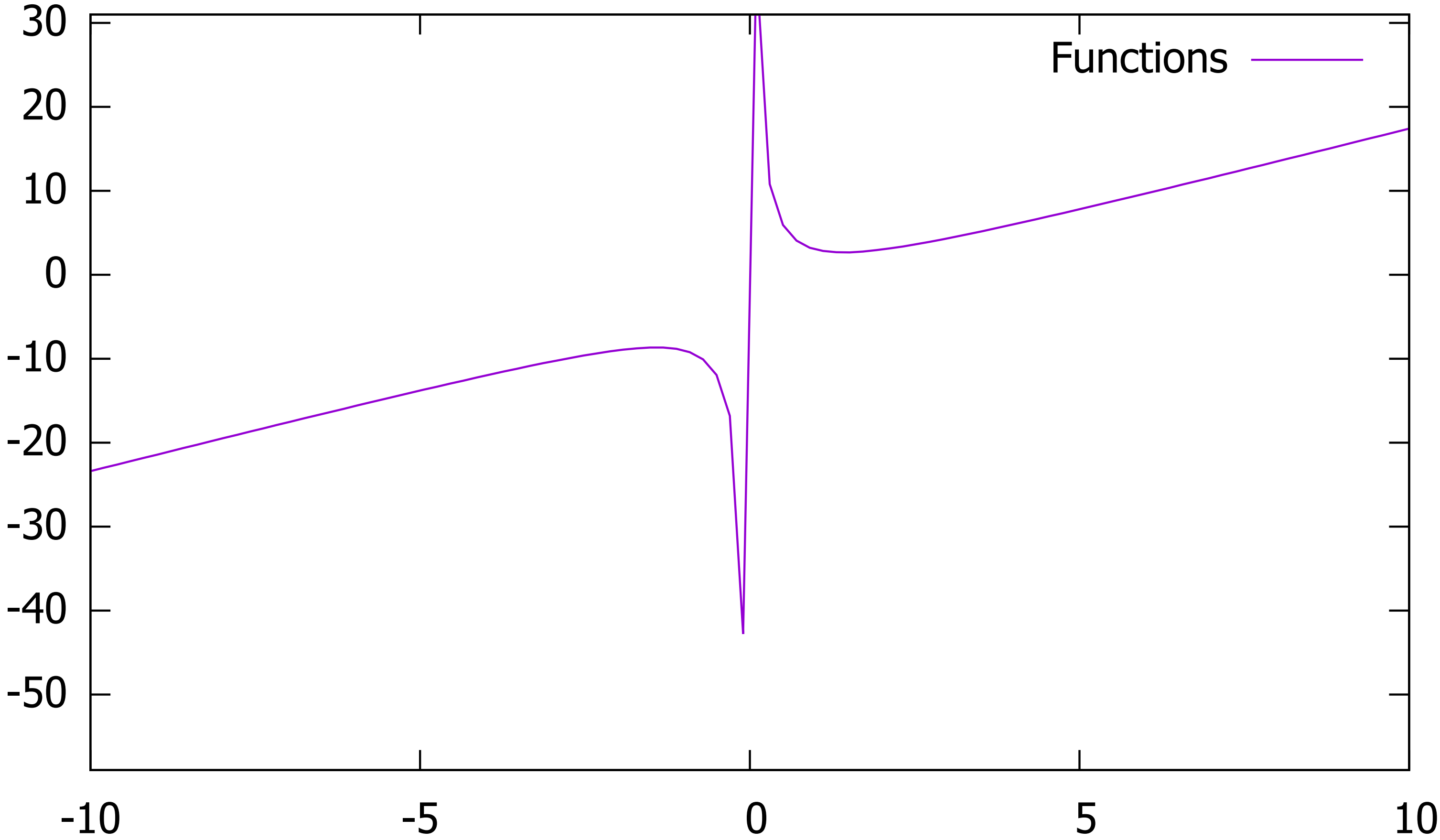

Functions
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-10
-5
0
5
10

ибо в силу неотрицательности функции f имеет место неравенство $\int\limits_{\eta}^{\eta'} f(x)dx \geq 0$ т. е. функция $\phi(\eta)$ возрастает на полуинтервале $[a, b)$. Существование несобственного интеграла $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ означает существование конечного предела.

$$\lim_{\eta \to b} \phi(\eta) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx,$$

что имеет место тогда и только тогда , когда функция $\phi(\eta)$ ограничена сверху (см. теорему 4 в п. 6.11), а это в силу (29.15) равносильно условию (29.14).$\triangleleft$

З а м е ч а н и е . При доказательстве леммы 1 было показано , что в случае неотрицательности функции f функция $\phi(\eta)$ (см. (29.15)) возрастает на $[a, b)$ и, следовательно , всегда имеет при $\eta \to b$ конечный или бесконечный , равный $+\infty$, предел в зависимости от того, ограничена она или нет. Если функция $\phi(\eta)$ неограничена на $[a, b)$, то

$$\lim_{\eta \to b} \int\limits_{a}^{\eta} f(x)dx \underset{(29.15)}{=} \lim_{\eta \to b} \phi(\eta) = +\infty,$$

и в этом случае пишут

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = +\infty$$

(как мы уже и поступали в примерах п. 29.1).

Теорема 1 *(признак сравнения). Пусть*

$$0 \leq g(x) \leq f(x), x \in [a, b). \tag{1}$$

Тогда:

1) если интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_{a}^{b} g(x)dx$;

2) если интеграл $\int\limits_{a}^{b} g(x)dx$ расходится, то расходится и интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

С л е д с т в и е 1. Пусть функции fug неотрицательны на промежутке $[a, b)$, $g(x) \neq 0$ при всех $x \in [a, b)$и существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = k. \tag{2}$$

Тогда: 1) если интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится и $0 \leq k < +\infty$, то и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится;

2)если интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ расходится и $0 \leq k < +\infty$ и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится.

Следствие 2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x \to b$, т. е. $f(x) = \phi(x)g(x), a \leq x < b, \lim\limits_{x \to b} \phi(x) = 1$, то интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся.

$\triangleright$ Докажем теорему . Для любого $\eta \in [a, b)$ в силу неравенства ?? имеем

$$\int\limits_\eta^a g(x)dx \leq \int\limits_\eta^a f(x)dx,$$

Поэтому если интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится и, следовательно , согласно лемме 1 ограничен сверху интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, т о будет ограничен сверху и интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$, откуда , согласно той же лемме , интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$ сходится.

Если же расходится интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$, то в силу уже доказанного интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ не может сходиться, так как тогда бы сходился и интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$, а это противоречит условию. Таким образом интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ расходится.$\triangleleft$

Докажем теперь следствие 1.

$\triangleright$ Пусть выполняется условие 2 и $0 \leq k < +\infty$. Из того, что k является пределом функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to b$, и из неравенства $k < k+1$ следует существование такого $\eta \in [a, b)$, что если $\eta < x < b$,то $\frac{f(x)}{g(x)} < k+1$, т.е.

$$f(x) < (k+1)g(x) \tag{3}$$

Если сходится несобственный интеграл $\int\limits_a^b g(x)dx$, то сходится интеграл $\int\limits_\eta^b (k+1)g(x)dx$(см.(29.3) и (29.9));следовательно в силу неравенства 3 интеграл $\int\limits_\eta^b (k+1)g(x)dx$, а поэтому и интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ сходится.

Пусть теперь условие 2 выполняется при $0 < k \leq +\infty$. Тогда зафиксируем произвольно такое k', что $0 < k' < k$. Из того, что k является пределом функции $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to b$, и из неравенства $k' < k$ следует существование такого $\eta \in [a, b)$, что для всех $x \in (\eta, b)$ выполняется неравенство $\frac{f(x)}{g(x)} > k'$, т. е. неравенство

$$f(x) > k'g(x)$$

Отсюда в силу расходимости интеграла $\int\limits_a^b g(x)dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^b k'g(x)dx$, а следовательно , по 1 и расходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$. $\lhd$

Докажем теперь следствие 2.

$\rhd$Из условия $\lim\limits_{x\to b} \phi(x) = 1$ следует, что существует такое число c, $a < c < b$, что при $c \leq x < b$ выполняется неравенство $\frac{1}{2} \leq \phi(x) \leq \frac{3}{2}$. А так как $f(x) = \phi(x)g(x)$, то

$$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x).$$

Отсюда в силу теоремы и следует , что интегралы $\int\limits_a^b f(x)dx$ и $\int\limits_a^b g(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся.

При применении признака сходимости для исследования интеграла обычно начинают со сравнения подынтегральной функции с функциями

$$\frac{1}{(x-a)^\alpha}, \quad \frac{1}{(b-a)^\alpha}, \quad \frac{1}{x^\alpha}$$

сходимость интегралов от которых уже известна (примеры п. 29.1 и п. 29.2).