Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ «Петрозаводский государственный университет»
Институт математики и информационных технологий
Кафедра информатики и математического обеспечения

Отчет по учебной практике
(компьютерные технологии в математике)

Выполнила:
Новикова Д.А. группа 22101

____
подпись

Руководитель практики:
к.т.н., доцент О. Ю. Богоявленская

____
подпись

Итоговая оценка:

____
оценка

Петрозаводск – 2022

Содержание

1 Описание работы

На учебной практике я смогла изучить и понять систему работы издательской системы Latex, я овладела инструментами набора и трансляции текстов, написанных на математическом языке. Дополнительно я освоила систему Gnuplot, которая позволяет строить научные графики. В Задании №2 нужно было подготовить документ, который содержал математический текст, с помощью системы Latex. В этой системе я узнала основные виды математических формул, спецзнаки, которые используются для их написания, а также как правильно писать команды для расположения этих формул в тексте. Также я получила знания о рубрикации текста (команды, которые создают заголовки, главы, разделы, отдельные абзацы и их нумерацию) и об оформлении окружений в тексте (команды для оформления замечаний, определений, теорем, следствий из них и лемм). Углубившись в тему Latex, я поняла, что это долгий и кропотливый процесс, но результат получается гораздо лучше, чем при работе в Word. В Задании №3 с помощью системы Gnuplot я строила изображение кривой в декартовых коодинатах, для которого использовала команды построения графика. Далее получившийся .png файл я разместила с помощью специальных команд в .tex файле из предыдущего задания, используя окружение для вставки. Gnuplot - достаточно полезная система если нужно посмотреть, как должен выглядеть график, или наглядно показать при написании какой-либо научной работы.

2 Результаты работы

2.1 Задание №2

Следствие. *Если функция f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существуют такие окрестность $U(x_0)$ точки x_0 и постоянная $c > 0$, что для всех $x \in X \cap U(x_0)$ выполняются неравенства:*

$$f(x) > c, \text{ если } f(x_0) > 0;$$
$$f(x) < -c, \text{ если } f(x_0) < 0.$$

Это сразу вытекает из свойства 2°, поскольку непрерывность в точке x_0 озночает существование у функции f в точке x_0 конечного предела, равного $f(x_0)$. В качестве c можно взять $\dfrac{|f(x_0|}{2}$.

Замечание. *Если у функции f в точке x_0 существует один из бесконечных пределов ∞, $+\infty$ и $-\infty$, то для любого числа $c >$ 0 существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для любой точки $x \in X \cap U(x_0)$ выполняются неравенства:*

$$|f(x_0)| > c, \text{ если } \lim_{x \to x_0} = \infty;$$
$$f(x_0) > c, \text{ если } \lim_{x \to x_0} = +\infty;$$
$$f(x_0) < c, \text{ если } \lim_{x \to x_0} = -\infty.$$

Это следует из определения 5 предела функции, в котором в качестве окрестности $U(a)$ бесконечно удаленной точки в этом случае следует взять окрестность $U(a, \dfrac{1}{c})$

3°. Если $f(x) = c$ - *постоянная,* $x \in X$ *то* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c.$

Это означает, в частности, что постоянная функция является непрерывной.

4°. Если $f(x) \geq a$, $x \in X$ *и существует конечный или определенного знака бесконечный предел* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, *то* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geq a$.

5°. Если $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, $x \in X$ *и существуют конечные или определенного знака бесконечные пределы* $\lim\limits_{x \to x_0} \phi(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x)$ *и они равны между собой, то существует* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \phi(x) = \lim_{x \to x_0} \psi(x)$$

6°. *Если существуют конечные пределы* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, *то существуют и конечные пределы*

$$\lim_{x \to x_0} [\lambda f(x) + \mu g(x)] = \lambda \lim_{x \to x_0} f(x) + \mu \lim_{x \to x_0} g(x), \lambda \in R, \mu \in R, \tag{1}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} g(x) \tag{2}$$

а если $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$, то и

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} \tag{3}$$

В последнем случае функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ рассматривается только для тех x, для которых $g(x) \neq 0$ (см. свойство 2°).

$\triangleright$ Утверждения 3°-6° следуют из соответсвующих утверждений последовательностей (см. пп. 5.3, 5.6) Докажем, например, формулу (2). Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in R$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b \in R$. Возьмем какую-либо последовательность $x_n \in X$, n = 1, 2, ..., имеющую своим пределом x_0. Тогда согласно определению 1 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = b$, поэтому в силу свойства пределов последовательностей (свойство 3° в п. 5.6)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \lim_{n\to\infty} g(x_n) = ab$$

и поскольку последовательность $\{x_n\}$ является произвольной последовательностью такой, что $x_n \to x_0$ и $x_n \in X$ n = 1, 2, ..., то согласно тому же определению 1 предела функции получим

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = ab = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x). \triangleleft$$

Следствие. *Если функции f и g непрерывны в точке $x_0 \in X$, то функции $\lambda f(x) + \mu g(x)$, $\lambda \in R$, $\mu \in R$, $f(x)g(x)$, а если $g(x_0) \neq 0$, то и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, непрерывны в точке x_0.*

$\triangleright$ Докажем, например, непрерывность произведения $f(x)g(x)$. Если функции f и g непрерывны в точке x_0, то в этой точке они имеют конечные пределы $f(x_0)$ и $g(x_0)$. Поэтому согласно формуле (2) получим

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)g(x_0)$$

Это и означает непрерывность произведения f g. $\triangleleft$

Отметим, что проведенное доказательство можно было бы и не проводить, так как непрерывность функции в точке означает, что (см. п. 6.2) эта точка принадлежит множеству задания функции и что у функции в этой точке существует предел по указанному множеству. Поскольку функции f и g заданы в точке x_0, то, очевидно, и функции $\lambda f(x) + \mu g(x)$, $f(x)g(x)$, а при $g(x_0) \neq 0$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, заданы в этой точке. В силу свойства 6° у перечисленных функций существуют пределы в точке x_0, принадлежащей в данном случае их множеству задания, что и означает их непрерывность в точке x_0. Иначе говоря, утверждение следствия является просто частным случаем утверждения 6°, когда точка, в которой рассматривается предел, принадлежит области определения функции.

1. Бесконечно малые.

Определение 1. *Функция $\alpha(x)$, $x \in X$, называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.*

Бесконечно малые функции играют в теории пределов роль, аналогичную той, которые играю бесконечно малые последовательности в теории пределов последовательностей (п. 5.5).

Лемма 1. *Для того чтобы у функции $f(x), x \in X$, существовал в точке x_0 конечный предел, равный a, необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x) = f(x) - a$ была бесконечно малой при $x \to x_0$.*

$\triangleright$ Действиетльно, существование конечного предела $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ равносильно тому, что (см. п.6.4) для любого $\epsilon > 0$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in X \cap U(x_0)$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \epsilon$, т.е. $|\alpha(x)| < \epsilon$, что и озночает бесконечную малость функции $\alpha(x)$ при $x \to x_0$.$\triangleleft$

Теорема 1. *Линейная комбинация конечного числа бесконечно малых при $x \to x_0$ функций является бесконечно малой при $x \to x_0$ функцией.*

Произведение бесконечно малой при $x \to x_0$ функции на ограниченную функцию является бесконечно малой при $x \to x_0$ функцией.

Следствие. *Произведение конечного числа бесконечно малых при $x \to x_0$ функций является бесконечно малой при $x \to x_0$ функцией.*

$\triangleright$ Первое утверждение теоремы сразу следует из свойства предела линейной комбинации функций (см.(1)). Докажем второе: пусть

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0, \tag{4}$$

а функция f ограничена на множестве X, т.е. существует такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \leq c. \tag{5}$$

Тогда для произвольной последовательности $x_n \to x_0, x_n \in X, n = 1, 2, ...$, то это означает, что

$$\lim_{x \to x_0} f(x)\alpha(x) = 0.$$

Для доказательства следствия из теоремы достаточно заметить, что всякая бесконечно малая при $x \to x_0$ функция, имея в точке x_0 конечный предел, ограничена в некоторой окрестности этой точки. Поэтому в некоторой окрестности точки x_0 произведение конечного числа бесконечно малых при $x \to x_0$ функций можно рассматривать как произведение бесконечно малой при $x \to x_0$ функции на ограниченную.$\triangleleft$

2.2 Задание №3

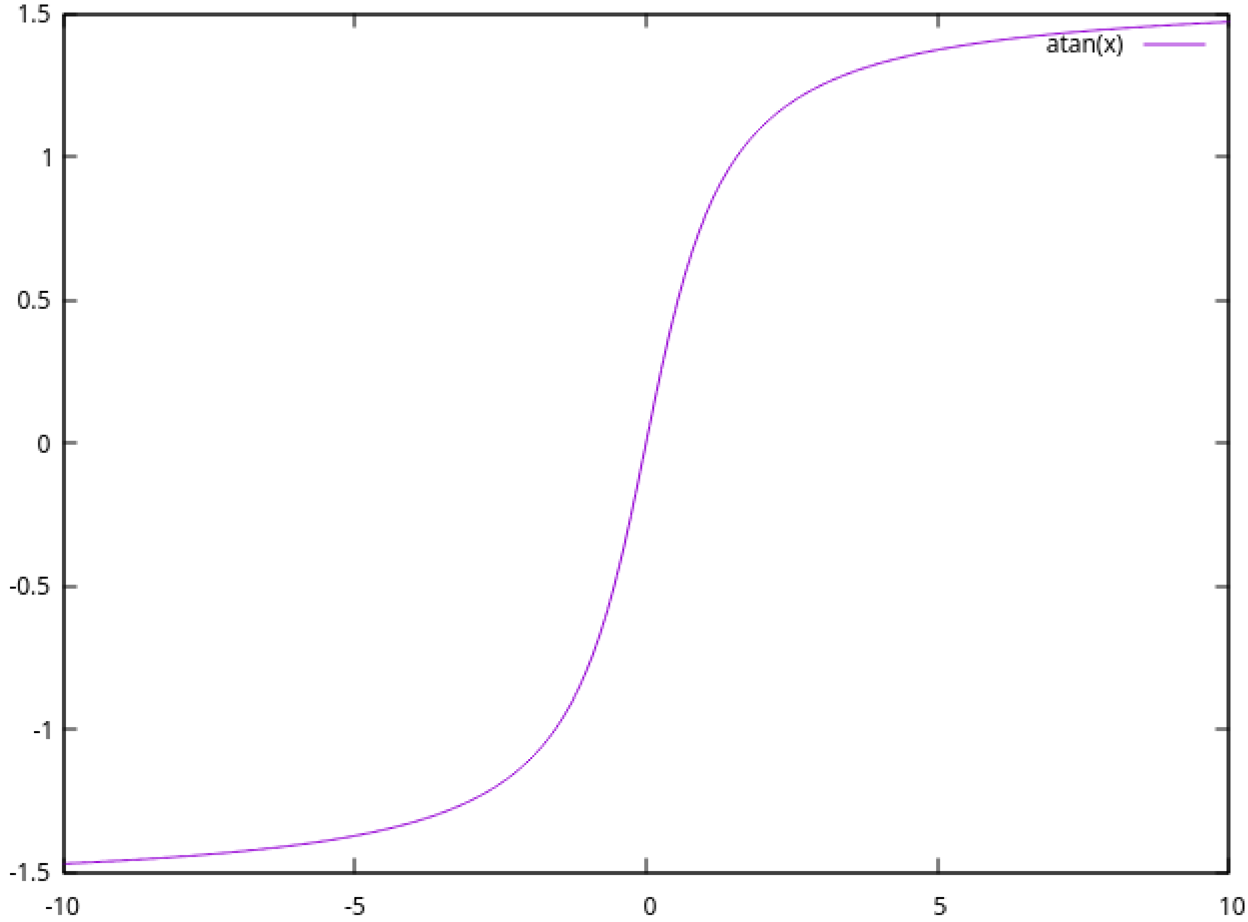

Рис. 1: Арктангенс