Задача генерации систем однородных неотрицательных линейных диофантовых уравнений

Кулаков К. А.

Научные руководители:
к.т.н., доцент, Ю. А. Богоявленский
к.ф.-м.н., доцент, Д. Ж. Корзун

Аннотация

Данная работа направлена на исследование задачи генерации систем однородных неотрицательных линейных диофантовых уравнений (системы одНЛДУ). Исследование сконцентрировано на частном классе систем одНЛДУ — ассоциированных с формальными грамматиками (системы одАНЛДУ).

Ключевым результатом работы является теорема о преобразовании произвольной системы одАНЛДУ. Преобразование существенным образом основано на определенном и исследованном нами частном классе систем одАНЛДУ — симметричные системы одАНЛДУ (системы содАНЛДУ). Данное преобразование положено в основу пяти предлагаемых нами алгоритмов генерации систем одАНЛДУ, включая и генерацию систем содАНЛДУ.

Содержание

Перечень сокращений и условных обозначений

АНЛДУ система — ассоциированная с грамматикой система НЛДУ.

НЛДУ — неотрицательное линейное диофантово уравнение.

одАНЛДУ система — однородная система АНЛДУ.

одНЛДУ — однородное уравнение НЛДУ.

содАНЛДУ система — симметричная система одАНЛДУ.

$\varnothing$ — пустое множество.

$\mathbb{O}$ — нулевой вектор, $\mathbb{O} = (0, 0, \dots, 0)$.

$\mathrm{E}^m(I^n)$ — булева $(n \times m)$-матрица разбиения, коэффициенты которой определяются как $\mathrm{E}^m_{kj}(I^n) = \mathrm{E}^m_{kj}(I_1, \dots, I_n) = 1 \iff \mathcal{I}_j = k$ для $k = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

e_k — стандартный единичный вектор, $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

I^n — разбиение множества $\mathbb{N}_m$, $I^n = \{I_1, \dots, I_n\}$.

$\mathcal{I}$ — линейное представление матрицы $\mathrm{E}^m(I^n)$ в виде вектора из $\mathbb{N}^m_n$.

$\mathcal{H}$ — базис Гильберта однородной системы НЛДУ, $\mathcal{H} = \{h^{(1)}, h^{(2)}, \dots, h^{(q)}\}$.

$\mathbb{N}$ — натуральный ряд, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$.

$\mathbb{N}_m$ — начальный отрезок натурального ряда длины m, $\mathbb{N}_m = \{1, 2, \dots, m\}$.

$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

$\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Введение

При исследовании математической проблемы может потребоваться генерация набора частных задач при определенных ограничениях на результат и процесс генерации. Такими ограничениями могут служить, например, построение как самой частной задачи, так и ее решения (тестовые и эталонные задачи), ограничения на вид генерируемой задачи (генерация задач некоторого класса), ограничения на время и память процесса генерации (эффективная генерация) и т.д. В общем случае проблемная область может содержать бесконечное число частных задач. В силу этого важной представляется проблема развития методов, позволяющих выполнять эффективную генерацию конечных наборов частных задач при заданных ограничениях.

В данной работе в качестве математической проблемы рассматривается задача решения однородных систем неотрицательных линейных диофантовых уравнений (системы одНЛДУ). Основной задачей решения системы одНЛДУ будем считать задачу нахождения базиса Гильберта системы. В общем случае эта задача вычислительно трудоемка [5].

Одним из перспективных алгоритмов для эффективного решения частного класса систем одНЛДУ является синтаксический алгоритм, предложенный Д. Ж. Корзуном [6, 5]. Алгоритм позволяет решать ассоциированные с формальными грамматиками системы одНЛДУ (системы одАНЛДУ)[2, 3, 5]. В качестве альтернативного синтаксическому используется алгоритм решения произвольной системы одНЛДУ, предложенный M. Filgueiras и A.-P. Tomás [25, 24].

Задача генерации систем одАНЛДУ заключается в построении на основе заданных ограничений как самой системы, так и ее базиса Гильберта. В силу того, что требуется также и построение базиса Гильберта, задача генерации сталкивается с теми же проблемами вычислительной сложности, что и задача решения. Кроме того, ограничения зависят от приложений и могут иметь форму, трудную для непосредственного учета (без решения системы), например, ограничение на размер базиса Гильберта генерируемой системы. Все это требует развития соответствующего теоретического аппарата.

Целью данной работы является разработка алгоритмов генерации систем одАНЛДУ. Объектом исследования в работе являются алгоритмы решения систем НЛДУ, а предметом исследования — методы генерации тестовых систем НЛДУ.

Для достижения поставленной цели необходимо выполнить теоретическое исследование систем одАНЛДУ, на основе которого разработать алгоритмы генерации тестовых систем.

Результаты данной работы докладывались и обсуждались на 54-й, 55-й и 57-й научных студенческих конференциях ПетрГУ, на международном научном семинаре FDPW'03, на конкурсе-конференции студентов и молодых ученых Северо-Запада “Технологии Microsoft в теории и практике программирования”, а также на научных семинарах кафедры информатики и математического обеспечения ПетрГУ. По результатам работы опубликованы тезисы [12, 10, 11, 14, 8] и статья [13].

1 Однородные системы неотрицательных линейных диофантовых уравнений, ассоциированные с контекстно-свободными грамматиками

В настоящем параграфе представлен теоретический аппарат, в том числе и оригинальный, который необходим для построения предлагаемых нами в параграфе 2 алгоритмов генерации задач линейного диофантова анализа. Текущее состояние теории НЛДУ представлено, например, в работах [20, 17, 22, 23, 25, 19, 18]. Важнейшие результаты исследований систем АНЛДУ можно найти в [5, 2, 7]. Основные положения данной главы опубликованы в [12, 10, 13].

В п. 1.1 представлен используемый понятийный аппарат теории систем одАНЛДУ. В п. 1.2 рассмотрен случай одного уравнения в системе одАНЛДУ. В п. 1.3 исследуется случай симметричных систем одАНЛДУ. В п. 1.4 сформулирована и доказана теорема о преобразовании произвольной системы одАНЛДУ к одному из рассмотренных в предыдущих двух пунктах частных случаев.

1.1 Обозначения и понятийный аппарат

Определение 1.1. *Однородной системой неотрицательных линейных диофантовых уравнений (одНЛДУ)* называется система однородных уравнений, все коэффициенты которой являются произвольными целыми числами, а компоненты решений принимают неотрицательные целые значения:

$$Ax = \mathbb{O}\,, \qquad A \in \mathbb{Z}^{n\times m}\,, \qquad x \in \mathbb{Z}_+^m\,, \tag{1}$$

где n — число уравнений системы, m — число неизвестных, A — матрица коэффициентов системы, вектор $\mathbb{O}$ — нулевой вектор из $\mathbb{Z}^n$.

Определение 1.2. Ненулевое решение $h \in \mathbb{Z}_+^m$ системы одНЛДУ (1) называется *неразложимым*, если оно не может быть представлено в виде суммы двух ненулевых решений этой же системы.

Определение 1.3. *Базисом Гильберта* системы одНЛДУ (1) называется множество всех ее неразложимых решений:

$$\mathcal{H} = \{h^{(1)}, \dots h^{(q)}\}\,,$$

где q — число базисных решений.

Пример 1.1. Рассмотрим систему одНЛДУ:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Она имеет следующий базис Гильберта:

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 32 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 34 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 36 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 38 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 40 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 42 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Отметим, что согласно теореме о базисе Гильберта (см. напр. [21, 17]) он определяется единственным образом, всегда конечен и любое решение x системы (1) может быть выражено через базис Гильберта следующим образом:

$$x = \sum_{s=1}^{q} \alpha_s h^{(s)}, \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q \in \mathbb{Z}_+. \tag{2}$$

Отметим, что, вообще говоря, разложение произвольного решения одНЛДУ по элементам базиса Гильберта неоднозначно.

Пример 1.2. Следующее частное решение $x = (5, 74, 5, 4, 2)^{\mathsf{T}}$ системы одНЛДУ из примера 1.1 может быть представлено в виде линейной комбинации элементов базиса Гильберта

$$x = h^{(1)} + h^{(6)} = h^{(2)} + h^{(5)} = h^{(3)} + h^{(4)}\,.$$

Неразложимость элементов базиса Гильберта эквивалентна их *минимальности*, т. е. любого решения h и произвольного базисного элемента $h' \in \mathcal{H}$, $h' \neq h$ неверно, что $h \leqslant h'$. При этом сравнение здесь покомпонентное:

$$(u_1, u_2, \ldots, u_m) \leqslant (v_1, v_2, \ldots, v_m) \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad u_j \leqslant v_j \quad \forall\, j = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Таким образом, базисное решение покомпонентно не превосходит любое другое решение системы НЛДУ. Более того, базисные решения несравнимы друг с другом в смысле покомпонентного сравнения векторов.

Определение 1.4. *Разбиением конечного отрезка натурального ряда* $\mathbb{N}_m = \{1, \ldots, m\}$ называется множество подмножеств $I^n = \{I_0, I_1, \ldots, I_n\}$, где

$$I_k \cap I_j = \mathbb{O} \quad \forall\, k, j \in \mathbb{N}_n \cup \{0\}\,,\ k \neq j\,; \qquad \bigcup_{k=0}^{n} I_k = \mathbb{N}_m\,; \qquad I_k \neq \varnothing \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_n\,.$$

Подмножество I_0 может быть пусто.

Будем называть *матрицей разбиения* $\mathrm{E}^m(I^n) = \mathrm{E}^m(I_0, I_1, \ldots, I_n)$ матрицу из $\{0,1\}^{n\times m}$:

$$\mathrm{E}^m_{k,i}(I^n) = 1 \overset{\text{def}}{\iff} i \in I_k\,, \quad k = 1,2,\ldots,n\,,\ i = 1,2,\ldots,m\,.$$

Для любой матрицы разбиения $\mathrm{E}^m(I^n)$ выполняется следующее свойство:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}^m_{ki}(I^n) = 1 \quad \forall\, i = \mathbb{N}_m \setminus I_0\,, \qquad \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}^m_{ki}(I^n) = 0 \quad \forall\, i = I_0\,,$$

т.е. столбец i либо нулевой ($i \in I_0$), либо содержит в точности одну единицу ($i \notin I_0$)[1].

Определение 1.5. *Ассоциированной с контекстно-свободной грамматикой системой одНЛДУ* (системой одАНЛДУ) называется система вида

$$\mathrm{E}^m(I_0, I_1, \ldots, I_n)x = Ax,$$

где $I^n = \{I_0, I_1, \ldots, I_n\}$ — разбиение $\mathbb{N}_m$, n — число уравнений системы, m — число неизвестных, $\mathrm{E}^m(I^n) = \mathrm{E}^m(I_0, I_1, \ldots, I_n)$ — матрица разбиения.

В частности, для примера 1.1 матрица $\mathrm{E}^m(I^n)$ будет следующего вида (см. также пример 1.3 ниже):

$$\mathrm{E}^5(I_0, I_1, I_2, I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I_0 = \{5\},\ \ I_1 = \{1,3\},\ \ I_2 = \{2\},\ \ I_3 = \{4\}.$$

Случай $I_0 \neq \varnothing$ легко преобразуется в случай $I_0 = \varnothing$ путем добавления соответствующих I_0-неизвестных в левую и правую части произвольных уравнений. В дальнейшем будем предполагать, что $I_0 = \varnothing$.

Связь систем одАНЛДУ с КС-грамматиками представлена в приложении.

Пример 1.3. Система одНЛДУ из примера 1.1 может быть записана в формате одАНЛДУ

$$\begin{cases} x_1 + x_3 &=& 2x_4 + x_5 \\ x_2 &=& 5x_1 + 7x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ x_4 + x_5 &=& 3x_5 \end{cases}$$

где $n = 3$, $m = 5$, $I_0 = \varnothing$, $I_1 = \{1,3\}$, $I_2 = \{2\}$, $I_3 = \{4,5\}$,
$\mathrm{E}(I^{3,5}) = \mathrm{E}(I_1, I_2, I_3) = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1 \end{pmatrix}$ и $A = \begin{pmatrix} 0&0&0&2&1 \\ 5&0&7&2&3 \\ 0&0&0&0&3 \end{pmatrix}$. Отметим, что неизвестная x_5 была добавлена к последнему уравнению, чтобы добиться $I_0 = \varnothing$.

[1]Матрица $\mathrm{E}^m(I^n)$ допускает эффективную реализацию в виде вектора $\mathcal{I}^m \in \mathbb{N}^m_n$, $\mathcal{I}^m_i = l \iff \mathrm{E}^m_{l,i}(I^n) = 1$. Так, в примере 1.1 вектор $\mathcal{I}^m = (1,2,1,3,0)$.

В линейной алгебре (см. напр. [9]) две системы уравнений называются эквивалентными, если их множества решений совпадают. В данной работе нам удобнее использовать другое понятие эквивалентности — с точностью до перенумерации неизвестных.

Определение 1.6. Пусть $I' = (I'_1, \dots, I'_n)$ и $I'' = (I''_1, \dots, I''_n)$ — произвольные разбиения $\mathbb{N}_m$. Две системы одАНЛДУ $\mathrm{E}(I')x = A'x$ и $\mathrm{E}(I'')x = A''x$ называются *эквивалентными* (с точностью до перенумерации), если перенумерацией неизвестных и уравнений их можно привести к системе $\mathrm{E}^m(I^n)x = Ax$, где матрица $\mathrm{E}^m(I^n) = \mathrm{E}^m(I_1, \dots, I_n)$ имеет вид, который мы будем называть *стандартной формой записи системы одАНЛДУ*:

$$\mathrm{E}^m(I_1, \dots, I_n) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots\dots\dots\dots & 0 \\ \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \\ 0 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

где $I_1 = \{1, \dots, k\} = \mathbb{N}_k$, $I_2 = \{k+1, \dots, j\} = \mathbb{N}_j \setminus \mathbb{N}_k$, $\dots$, $I_n = \{l+1, \dots, m\} = \mathbb{N}_m \setminus \mathbb{N}_l$.

Базисы Гильберта эквивалентных систем одАНЛДУ одинаковы с точностью до перестановки неизвестных. Это свойство эквивалентности будет использоваться нами при построении алгоритмов генерации (п. 2). Генерация одной системы в стандартной форме означает фактически генерацию $m! * n!$ тестовых систем, получаемых перестановкой неизвестных.

Пример 1.4. Для системы одАНЛДУ из примера 1.3 стандартный вид матрицы $\mathrm{E}^m(I^n)$:

$$\mathrm{E}^m(I_1, I_2, I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Стандартный вид системы:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 & = & 2y_4 + y_5 \\ y_3 & = & 5y_1 + 7y_2 + 2y_4 + 3y_5 \\ y_4 + y_5 & = & 3y_5 \end{cases}$$

Перенумерация неизвестных: $y_1 = x_1$, $y_2 = x_3$, $y_3 = x_2$, $y_4 = x_4$, $y_5 = x_5$.

Определения 1.7-1.8 относятся к приложению преобразования Гаусса для последовательного вычисления базиса Гильберта системы (см. напр. [18]).

Определение 1.7. *Зависимые неизвестные* — неизвестные, значения которых вычисляются через остальные неизвестные. Остальные неизвестные будем называть *свободными*.

Пример 1.5. Рассмотрим следующее уравнение

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 10x_3 + 3x_4 + 2x_6.$$

Зависимыми неизвестными являются x_1, x_2 и x_5. Неизвестные x_3, x_4 и x_6 являются свободными, т.к. при решении данного уравнения (см. п. 1.2) для неизвестных x_3, x_4 и x_6 задаются определенные значения, а неизвестные x_1, x_2 и x_5 вычисляются.

Определение 1.8. Пусть задана система одНЛДУ $S = S' \wedge S''$ с n уравнениями. $\mathcal{H}'$ и $\mathcal{H}''$ — базисы Гильберта систем S' и S'' соответственно, $\mathcal{H}' = \{h_1, h_2, \dots, h_q\}$. Каждое решение системы S' есть линейная комбинация ее базисных векторов $x = c_1h_1 + c_2h_2 + \dots + c_qh_q$. Множество решений системы S есть пересечение множеств решений систем S' и S'', следовательно, базисные решения системы S также являются линейными комбинациями базисных решений системы S'.

Под *подстановкой базиса Гильберта* будем понимать подстановку линейной комбинации базисных векторов $\mathcal{H}' = \{h_1, h_2, \dots, h_q\}$ в систему S'' и с неизвестными $c_1, c_2, \dots, c_q$. При этом количество уравнений в системе равно $(n - l)$, l — количество уравнений системы S'.

Пример 1.6. Рассмотрим систему одАНЛДУ.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 2x_3 \\ x_3 + x_4 &= 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_5 &= x_4 + x_5 \end{cases}$$

В качестве системы S' возьмем первое уравнение $x_1 + x_2 = 2x_3$. Остальные уравнения образуют систему S''. Базисом Гильберта для системы S' будет

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} : \ \mathcal{H}' = \left\{ \begin{array}{c} h_1 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} h_2 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} h_3 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} h_4 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}, \begin{array}{c} h_5 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}.$$

Любое решение уравнения S' есть $h = c_1h_1 + c_2h_2 + c_3h_3 + c_4h_4 + c_5h_5$. Следовательно, процесс подстановки базиса Гильберта для системы S'' будет выглядеть следующим образом

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 &= 2(c_2 + 2c_3) + (2c_1 + c_2) + 3(c_1 + c_2 + c_3) \\ c_5 &= c_4 + c_5 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 &= 5c_1 + 6c_2 + 7c_3 \\ c_5 &= c_4 + c_5 \end{cases}.$$

Подстановка базиса Гильберта будет использована нами при преобразовании системы одАНЛДУ для построения базиса Гильберта конечной системы из базиса Гильберта одного уравнения одАНЛДУ или системы содАНЛДУ.

Определение 1.9. *Уравнение Фробениуса с единичными коэффициентами* (при неизвестных) — это НЛДУ вида

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = T\,, \tag{3}$$

где T — неотрицательная целая константа.

В случае $T = 0$ уравнение (3) имеет только нулевое решение. Для $T > 0$ в [15] показано, что это уравнение имеет конечное множество решений, число которых определяется формулой

$$q = C_{T+n-1}^{n-1} = \frac{(T+n-1)!}{T!(n-1)!}. \tag{4}$$

Все решения несравнимы друг с другом в смысле покомпонентного сравнения векторов.

Пример 1.7. Рассмотрим следующее уравнение Фробениуса с единичными коэффициентами:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4.$$

Множество решений этого уравнения состоит из $q = \dfrac{(4+3-1)!}{4!(3-1)!} = \dfrac{6!}{4!2!} = 15$ элементов:

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

Уравнения Фробениуса будут использованы нами при решении системы одАНЛДУ для $n = 1$.

1.2 Случай одного уравнения в системе одАНЛДУ

Рассмотрим систему одАНЛДУ, состоящую из одного уравнения ($n = 1$). В этом случае система одАНЛДУ имеет следующий вид[2]:

$$\sum_{k=1}^{m'} x_k \; = \sum_{k=m'+1}^{m} a_k x_k, \qquad a_{m'+1}, \ldots, a_m \in \mathbb{N}\,, \tag{5}$$

Здесь $\mathrm{E}^m(I^1) = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{Z}_+^m$, $A = (0, 0, \ldots, 0, (a_{m'+1}+1), \ldots, (a_m+1))$. Данное уравнение является одним из частных случаев, к которому сводится произвольная система одАНЛДУ (см. п. 1.4).

[2] В варианте записи, когда требуется, чтобы $I_0 = \varnothing$, данное уравнение принимает вид $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k = \sum\limits_{k=m'+1}^{m} (a_k+1) x_k$.

Докажем теорему, которая дает способ вычисления базиса Гильберта любого уравнения вида (5).

Теорема 1.1. *Базисом Гильберта уравнения* (5) *является множество*

$$\mathcal{H} = \left\{ h \in \mathbb{Z}_+^m \;\middle|\; \begin{array}{l} h = (c_1, \ldots, c_{m'}, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^{\mathsf{T}}, \\ \textit{1 стоит на } j\textit{-й позиции, } m' < j \leqslant m, \\ \sum\limits_{k=1}^{m'} c_k = a_j, \quad c_k \in \mathbb{Z}_+ \end{array} \right\}. \tag{6}$$

Доказательство. Упорядочим элементы множества $\mathcal{H}$ из условия (6) теоремы следующим образом:

$$\mathcal{H} = \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{m'1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}^{h^{(1)}}, \overbrace{\begin{pmatrix} c_{12} \\ \vdots \\ c_{m'2} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}^{h^{(2)}}, \ldots, \overbrace{\begin{pmatrix} c_{1q} \\ \vdots \\ c_{m'q} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}^{h^{(q)}} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} c_{*s} \\ e_l \end{pmatrix} \right\}_{s=1}^{q}$$

При этом, вектора $h^{(s)}$, для которых $h_j^{(s)} = 1$ $(m' < j \leqslant m)$, взаимнооднозначно соответствуют решениям следующего уравнения Фробениуса с единичиными коэффициентами и неизвестными c_{*s}:

$$\sum_{k=1}^{m'} c_{ks} = a_j. \tag{7}$$

Очевидно, что любой вектор $h^{(s)} = \begin{pmatrix} c_{*s} \\ e_{j-m'} \end{pmatrix}$ является решением уравнения (5). В то же время, любые два решения $h', h'' \in \mathcal{H}$ несравнимы друг с другом: 1) либо $h'_{m'+k} = h''_{m'+l} = 0$ и $h'_{m'+l} = h''_{m'+k} = 1$ (единицы на разных позициях, $1 \leqslant k, l \leqslant m - m'$, $k \neq l$), а значит h' и h'' несравнимы, 2) либо $h'_{m'+k} = h''_{m'+k} = 1$, а тогда h' и h'' несравнимы в силу несравнимости c' и c'' как решений уравнения (7) для $j = m' + k$. Тем самым, доказано, что множество (6) содержит только несравнимые решения уравнения (5).

Докажем теперь, что произвольное решение $x = (x_1, \ldots, x_m)^{\mathsf{T}}$ уравнения (5) может быть выражено через элементы заданного множества. Тем самым будет доказано, что (6) содержит все базисные решения уравнения (5).

Пусть x — произвольное ненулевое решение уравнения (5). Тогда $\sum\limits_{j=m'+1}^{m} x_j > 0$. Следовательно существует j, т. ч. $m' + 1 \leqslant j \leqslant m$ и $x_j > 0$. Докажем, что найдутся такие $x' \in \mathbb{Z}_+^m$ и $h \in \mathcal{H}$, что $x = x' + h$ и $h_j = 1$.

Подставим $x = x' + h$ в левую часть уравнения (5):

$$\sum_{k=1}^{m'} (x'_k + h_k) \; = \sum_{k=m'+1}^{m} a_k x_k \; .$$

В силу $h_k = 0$ для $k = m' + 1, \ldots, j - 1, j + 1, \ldots, m$ и $h_j = 1$ должно выполняться следующее уравнение для x' и h:

$$\sum_{k=1}^{m'} x'_k + \sum_{k=1}^{m'} h_k \; = \sum_{\substack{k=m'+1 \\ k \neq j}}^{m} a_k x_k \; + \; a_j(x_j - 1) \; + \; a_j \; .$$

Это уравнение разрешимо в неотрицательных целых, если, например, 1) x' есть решение уравнения

$$\sum_{k=1}^{m'} x'_k \; = C \; , \quad \text{где } C = \sum_{\substack{l=m'+1 \\ l \neq j}}^{m} a_l x_l \; + a_j(x_j - 1) \geqslant 0 \; ,$$

и 2) найдется в (6) такое h, что

$$\sum_{k=1}^{m'} h_k = a_j \; , \qquad h_{m'+1} = 0 \, , \; \ldots , \; h_{j-1} = 0 \, , \; h_j = 1 \, , \; h_{j+1} = 0 \, , \; \ldots , \; h_m = 0 \, ,$$

Уравнение из условия 1) всегда разрешимо в силу свойств уравнения Фробениуса, а вектор h, удовлетворяющий условию 2), очевидно найдется в силу построения множества (6). Тем самым, искомое представление $x = x' + h$ найдено.

Вектор x' также является решением уравнения (5). Рассуждая аналогично, можно найти представление $x' = x'' + h$ для некоторого $h \in \mathcal{H}$. Продолжая этот процесс, за конечное число шагов придем нулевому решению:

$$x = x' + h' = x'' + h'' + h' = \cdots = \mathbb{O} + \sum_{s=1}^{q} \alpha_s h^{(s)}.$$

Итак, получаем разложение произвольного решения x в виде неотрицательной линейной целочисленной комбинации векторов из $\mathcal{H}$, что и завершает доказательство теоремы. $\square$

Отметим, что другое доказательство этой теоремы, основанное на методах теории формальных грамматик, дано в [4].

1.3 Симметричные системы одАНЛДУ

В данном параграфе рассматривается частный случай систем одАНЛДУ — системы с симетричной структурой левой и правой частей. Данные системы является одним из частных видов, к которому может быть преобразована произвольная система одАНЛДУ (см. п. 1.4).

Отметим, что в работах [16, 1] рассматриваются системы неравенств, аналогичных симметричным системам одАНЛДУ, и исследуется вопрос о разрешимости этих систем. Однако в случае неравенств, контур в графе системы уравнений не всегда является решением, т.к. он может быть решением только если все неравенства входящие в контур являются нестрогими.

Данные системы неравенств в некотором смысле аналогичны симметричным системам одАНЛДУ, т.к. в обоих случаях исследуется вопрос о существовании контуров в графах.

1.3.1 Свойства симметричных систем одАНЛДУ

Определение 1.10. *Симметричной системой одАНЛДУ* (система содАНЛДУ) будем называть следующую систему из n уравнений и с m неизвестными:

$$\mathrm{E}^m(I^n)x = \mathrm{E}^m(J^n)x\,, \tag{8}$$

где $\mathrm{E}^m(I^n)$ и $\mathrm{E}^m(J^n)$ — матрицы разбиения.

Пример 1.8. Рассмотрим систему содАНЛДУ:

$$\begin{cases} x_1 & = & x_1 \\ x_2 + x_4 & = & x_3 + x_4 + x_5 \\ x_3 + x_5 & = & x_2 \end{cases} \tag{9}$$

Для данной системы содАНЛДУ матрицы разбиения выглядят следующим образом:

$$\mathrm{E}^m(I^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{E}^m(J^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Базис Гильберта системы содАНЛДУ (9):

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Теорема 1.2. *Любое уравнение системы содАНЛДУ* (8) *равносильно сумме всех остальных уравнений.*

Доказательство. Рассмотрим систему содАНЛДУ (8). Выберем произвольное уравнение k. Остальные уравнения образуют систему одНЛДУ

$$\sum_{i \in I_p} x_i = \sum_{j \in J_p} x_j, \quad p = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n. \tag{10}$$

Сложим все уравнения системы (10). По свойству матриц разбиения получаем

$$\sum_{i\in\mathbb{N}_m\setminus I_k} x_i = \sum_{j\in\mathbb{N}_m\setminus J_k} x_j. \tag{11}$$

Вычитая уравнение (11) из тождественного равенства $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}_m} x_i = \sum\limits_{j\in\mathbb{N}_m} x_j$ получаем

$$\sum_{i\in J_k} x_i = \sum_{j\in I_k} x_j.$$

Последнее полученное уравнение есть в точности уравнение k системы (8). □

Следствие 1.2.1. *Множества решений систем (8) и (10) совпадают.*

Доказательство. Пусть x — произвольное решение системы (8). Следовательно x удовлетворяет каждому уравнению этой системы. По построению системы (10) x удовлетворяет каждому уравнению системы (10). Следовательно x — решение системы (10).

Пусть теперь x — произвольное решение системы (10), т.е. x удовлетворяет каждому уравнению этой системы, а значит и сумме всех уравнений (11) системы (10). Следовательно, x удовлетворяет каждому уравнению системы (8). □

Очевидно, что базисы Гильберта систем (8) и (10) также совпадают, в силу свойства единственности базиса Гильберта.

1.3.2 Графическое представление симметричных систем одАНЛДУ

Представим произвольную систему содАНЛДУ в виде конечного ориентированного графа (*граф системы содАНЛДУ*) следующим образом:

— вершинам графа соответствуют уравнения;

— дугам графа соответствуют неизвестные системы.

Дуга "x_i" выходит из вершины "k" и входит в вершину "j", если переменная x_i встречается в левой части уравнения k и в правой части уравнения j. По свойству матрицы разбиения каждое неизвестное встречается в точности один раз в левой и правой частях системы. Используем ориентацию "слева направо" (в противном случае можно поменять местами левую и правую части системы содАНЛДУ).

Пример 1.9. Ориентированный граф для системы (9) из примера 1.8 представлен на рис. 1. В данном примере вершинам "1", "2" и "3" соответствуют уравнения 1, 2 и 3 системы (9):

$$\begin{cases} 1: & x_1 & = & x_1 \\ 2: & x_2 + x_4 & = & x_3 + x_4 + x_5 \\ 3: & x_3 + x_5 & = & x_2 \end{cases}$$

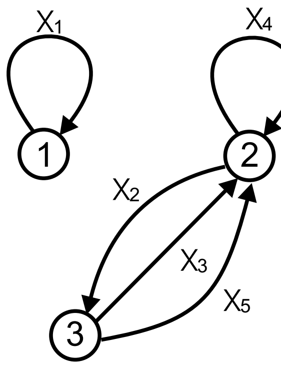

Рис. 1: Графическое представление содАНЛДУ.

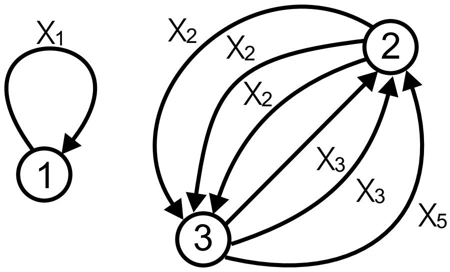

Рис. 2: Графическое представление решения $x = (1, 3, 2, 0, 1)^{\mathsf{T}}$.

Аналогично, решения системы содАНЛДУ также можно представить в виде конечного ориентированного мультиграфа (*мультиграф решения системы содАНЛДУ*) следующим способом:

— вершины графа соответствуют уравнениям;

— каждой компоненте решения соответствуют дуги графа в количестве равном величине компоненты решения.

Дуги “x_i” выходят из вершины “k” и входят в вершину “j”, если переменная x_i встречается в левой части уравнения k и в правой части уравнения j. Без потери общности полагаем ориентацию “слева направо”.

Таким образом, построение аналогично случаю графа системы, однако число кратных дуг определяется значениями компонент решения.

Пример 1.10. Решению $x = (1, 3, 2, 0, 1)^{\mathsf{T}}$ системы содАНЛДУ (9) соответствует мультиграф, представленный на рис. 2.

Лемма 1.1. *Число входящих дуг для вершины мультиграфа решения системы содАНЛДУ равно числу исходящих.*

Доказательство. Пусть k — произвольное уравнение системы содАНЛДУ, x — решение системы. Подставим решение x в уравнение k. По построению мультиграфа решения в правой части уравнения k записано число входящих дуг, а в левой части — число выходящих дуг. Следовательно число входящих дуг вершины мультиграфа решения равно числу выходящих дуг. $\square$

Лемма 1.2. *Мультиграф решения системы содАНЛДУ содержит хотя бы один простой контур.*

Доказательство. Допустим противное: пусть x — решение системы содАНЛДУ и мультиграф решения x не содержит контуров.

Пусть вершина a_1 мультиграфа решения x имеет выходящую дугу p_1. Так как мультиграф решения x не содержит контуров, то дуга p_1 входит в вершину a_2, $a_2 \neq a_1$. По лемме 1.1 существует дуга p_2 выходящая из вершины a_2. Так как мультиграф решения x не содержит контуров, то дуга p_2 входит в вершину a_3, $a_3 \neq a_1$, $a_3 \neq a_2$. По лемме 1.1 существует дуга p_3 выходящая из вершины a_3. И так далее.

В итоге мы получим цепь с бесконечным числом различных дуг и вершин, что противоречит конечности мультиграфа. $\square$

Теорема 1.3. *Решение x системы содАНЛДУ является неразложимым тогда и только тогда, когда мультиграф решения x — простой контур.*

Доказательство. Допустим противное: существует решение x, т.ч. мультиграф решения x не является простым контуром. Докажем, что решение x не является неразложимым.

По лемме 1.2 мультиграф решения x содержит хотя бы один простой контур. Выделим в мультиграфе решения x простой контур. Данный контур является мультиграфом решения y системы содАНЛДУ, т.к.:

— дуги контура соответствуют единичным значениям соответствующих неизвестных;

— данное решение удовлетворяет всем уравнениям системы (число выходящих дуг равно числу входящих или, другими словами, левые части уравнений равны правым).

Так как x и y являются решениями системы содАНЛДУ и $y < x$ (сравнение покомпонентное), то $x - y$ тоже является решением системы содАНЛДУ. Следовательно x не является неразложимым решением системы содАНЛДУ, что противоречит предположению. $\square$

Теорема 1.4. *Базис Гильберта системы содАНЛДУ содержит только $\{0,1\}$-вектора, т.е. $\mathcal{H} \subset \{0,1\}^{m \times q}$, где m — число неизвестных, q — число компонент базиса Гильберта.*

Доказательство. Базис Гильберта — это множество неразложимых решений содАНЛДУ. Мультиграф неразложимого решения является простым контуром. Простой контур содержит не более одного вхождения для каждой дуги неизвестной. $\square$

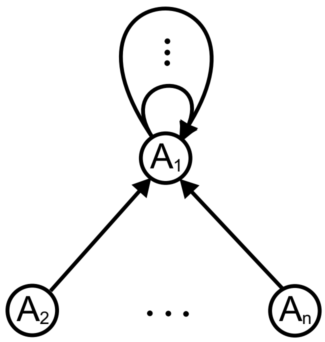

Рис. 3: Граф с минимальным количеством простых контуров.

Теорема 1.5. *Минимальная размерность базиса Гильберта для множества систем содАНЛДУ* (8) *с заданной матрицей разбиения* $\mathrm{E}^m(I^n)$ *равна*

$$\min_{k\in\mathbb{N}_n}\sum_{i\in I_k}\mathrm{E}^m_{k,i}(I^n).$$

Доказательство. На основе графовой интерпретации систем содАНЛДУ данная теорема звучит следующим образом: на множестве ориентированных графов с n вершинами, m дугами и с заданным распределением выходов дуг минимальное количество простых контуров равно минимальному числу выходов у вершин графа.

Пусть минимальное количество выходов у вершин графа равно t. Докажем, что невозможно построить заданный граф с количеством различных простых контуров меньше t.

Допустим противное: существует заданный граф $G(k)$ с числом простых контуров $k < t$. Тогда у каждой вершины графа $G(k)$ существует выходящая дуга, по которой не проходит ни одно решение.

Возьмем вершину A_1 графа $G(k)$. Из вершины A_1 выходит дуга p_1, по которой не проходит ни одно решение. Дуга p_1 входит в вершину A_2, $A_2 \neq A_1$ (иначе мы построили новый простой контур). Из вершины A_2 выходит дуга p_2, по которой не проходит ни одно решение. Дуга p_2 входит в вершину A_3, $A_3 \neq A_1$, $A_3 \neq A_2$ (иначе мы построили новый контур). И так далее.

В итоге мы построили простую цепь с бесконечным числом вершин и дуг, что противоречит конечности графа. Следовательно не существует заданного графа с числом простых контуров $k < t$.

Построим явно граф $G(t)$ с числом простых контуров $k = t$.

Пусть вершина A_1 имеет число выходов равное t. Тогда сделаем для всех дуг входящей вершиной вершину A_1 (см рис. 3). Система содАНЛДУ будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_t & = & x_1 + x_2 + \dots + x_m \\ x_{t+1} + x_{t+2} + \dots + x_p & = & 0 \\ x_{p+1} + x_{p+2} + \dots + x_z & = & 0 \\ \dots \\ x_{z+1} + x_{z+2} + \dots + x_m & = & 0 \end{cases},$$

а базис Гильберта — $\{e_1, e_2, \dots, e_t\}$.

Докажем, что у данного графа $G(t)$ ровно t простых контуров. Дуги, выходящие из вершины A_1 образуют простые контуры $A_1 \to A_1$. Количество таких контуров равно t. Любые дуги, выходящие не из вершины A_1 входят в вершину A_1. Следовательно они не участвуют в образовании новых контуров (отсутствуют переходы из вершины A_1 на другие вершины). Следовательно граф $G(t)$ имеет ровно t простых контуров. □

1.4 Преобразование произвольной системы одАНЛДУ

Рассмотрим следующее преобразование произвольной системы одАНЛДУ $\mathrm{E}^m(I^n)x = Ax$. Пусть $S^{(0)}(I^n, A)$ — исходная система одАНЛДУ. Ее можно записать как $\widetilde{A}^{(0)}x = \mathbb{O}$, где $\widetilde{A}^{(0)} = A - \mathrm{E}^m(I^n) \in \{\mathbb{Z}_+ \cup \{-1\}\}^{n\times m}$. Без потери общности будем предполагать, что $S^{(0)}$ не содержит тождественных уравнений $0 = 0$, поскольку их всегда можно удалить без изменения множества решений системы.

Преобразование будем выполнять последовательно $S^{(0)} \to S^{(1)} \to \dots \to S^{(r)}, r < n$, исключая на каждом шаге одно уравнение и не менее одной неизвестной. Система $S^{(l)}$ содержит $n-l$ уравнений и $m_l < m$ неизвестных ($l = 1, 2, \dots, r$). В итоге получим систему $S^{(r)}$, для которой дальнейшее исключение невозможно.

Пусть $S^{(l)}$ — текущая система $\widetilde{A}^{(l)}x = \mathbb{O}$, $A^{(l)} \in \{\mathbb{Z}_+ \cup \{-1\}\}^{(n-l)\times m_l}$. Сложим все уравнения:

$$\sum_{j=1}^{m_l} c_j x_j = 0, \qquad \text{где } c_j = \sum_{i=1}^{n-l} \widetilde{A}^{(l)}_{ij}. \tag{12}$$

Преобразование $S^{(l)} \to S^{(l+1)}$ выполняется, если есть хотя бы один коэффициент $c_k = -1$. В этом случае найдется уравнение i_0 т. ч.

$$K = \left\{ k \mid \widetilde{A}^{(l)}_{i_0 k} = -1 \text{ и } \widetilde{A}^{(l)}_{ik} = 0 \text{ для всех } i \neq i_0 \right\} \neq \varnothing. \tag{13}$$

Без потери общности полагаем $i_0 = n-l$, т.е. последнее уравнение системы $S^{(l)}$. В противном случае это можно получить путем перенумерации уравнений. Аналогично полагаем $K = \{r_l+1, \dots, m_l\}$, т.е. последние неизвестные. В противном случае этого можно достичь путем перенумерации неизвестных.

Используя уравнение n_l выразим неизвестные x_k, $k \in K$:

$$\sum_{k=r_l+1}^{m_l} x_k = \sum_{k=1}^{r_l} \widetilde{A}^{(l)}_{n_l k} x_k = T_{l+1}(x_1, \dots, x_{r_l}). \tag{14}$$

Поскольку, помимо данного уравнения неизвестные x_k, $k \in K$ в системе $S^{(l)}$ больше не встречаются, то, при заданных значениях неизвестных $x_1, \ldots, x_{r_l}$, используя последнее уравнение, можно подобрать соответствующие значения неизвестных x_k, $k \in K$. Следовательно, при решении системы $S^{(l)}$ требуется определить значения неизвестных $x_1, \ldots, x_{r_l}$, а, затем, с помощью уравнения (14) найти значения остальных неизвестных. То есть, неизвестные $x_1, \ldots, x_{r_l}$ являются свободными, а неизвестные $x_{r_l+1}, \ldots, x_{m_l}$ — зависимые.

Очередная система $S^{(l+1)}$ строится из $S^{(l)}$ исключением уравнения n и неизвестных x_k, $k \in K$. Система $S^{(l+1)}$ является системой одАНЛДУ, т.к. она была получена из системы одАНЛДУ путем исключения одного уравнения и неизвестных, которые входили только в это уравнение.

В данном переходе мы разбиваем систему одАНЛДУ на две системы, одна из которых состоит из одного уравнения.

Преобразование завершается через конечное число шагов, поскольку на каждом шаге из системы удаляется в точности одно уравнение. В результате получаем систему $S^{(r)}$, где $0 \leqslant r < n$, n — число уравнений в исходной системе $S^{(0)}$.

Если система $S^{(r)}$ состоит из одного уравнения, то она имеет следующий вид:

$$\sum_{j \in I_1} x_j = \sum_{j=1}^{m_r} a_{1j} x_j. \tag{15}$$

Данное уравнение не является пустым, т.е. не равно $0 = 0$, в силу начального предположения.

Если $p = n - r > 1$, то все коэффициенты $c_j \geqslant 0$. Неотрицательный вектор x' может выступать в качестве решения уравнения (12) тогда, когда при коэффициентах $c_j > 0$ стоят нулевые компоненты решений, т.е. $x_j = 0$. Следовательно, можно исключить из рассмотрения неизвестные x_j при $c_j > 0$ и положить их равными 0.

Для коэффициентов $c_j = 0$ система имеет следующий вид:

$$\sum_{i \in I_k} x_i = \sum_{j \in J_k} x_j, \; k = \overline{1,p}, \tag{16}$$

где $\bigcup\limits_{k=\overline{1,p}} I_k = \bigcup\limits_{k=\overline{1,p}} J_k$. Разбиения I, J — разбиения для системы $S^{(r)}$ с учетом того, что $x_j = 0$ для $c_j > 0$. Система (16) является системой содАНЛДУ.

Базис Гильберта $\mathcal{H}^{(0)}$ исходной системы $S^{(0)}$ может быть вычислен по базису Гильберта $\mathcal{H}^{(r)}$ итоговой системы $S^{(r)}$ (уравнение (15) или система (16)) в порядке, обратном выполненному преобразованию:

$$\mathcal{H}^{(r)} \to \mathcal{H}^{(r-1)} \to \cdots \to \mathcal{H}^{(0)}.$$

Пусть $\mathcal{H}^{(l+1)}$ — текущий базис Гильберта, соответствующий системе $\widetilde{A}^{(l+1)}x = \mathbb{O}$. Тогда существует уравнение (14) которое было исключено из системы $\widetilde{A}^{(l)}x = \mathbb{O}$ для преобразования в систему $\widetilde{A}^{(l+1)}x = \mathbb{O}$. Компоненты решения x_k, $k \in K$ можно получить используя подстановку базиса Гильберта $\mathcal{H}^{(l+1)}$ в уравнение (14). В силу свойств подстановки (см. п. 1.1) полученные решения составляют базисом Гильберта $\mathcal{H}^{(l)}$ системы $\widetilde{A}^{(l)}x = \mathbb{O}$.

Теорема 1.6. *Пусть задана произвольная система одАНЛДУ из n уравнений с m неизвестными:*

$$\mathrm{E}^m(I_1, \ldots, I_n)x = Ax. \tag{17}$$

Задача нахождения базиса Гильберта системы (17) сводится к задаче нахождения базиса Гильберта либо уравнения вида (15), либо системы содАНЛДУ вида (16).

Доказательство. Выполним описанное выше преобразование системы (17) либо к виду (15), либо к виду (16). Решаем задачу нахождения базиса Гильберта полученной системы. Вычисляем базис Гильберта исходной системы, используя подстановку базисов в порядке, обратном выполненному преобразованию. □

С точки зрения генерации системы одАНЛДУ теорема 1.6 сводит задачу к построению уравнения (15) или системы содАНЛДУ (16), а, затем к преобразованию к системе искомого вида.

С точки зрения решения системы одАНЛДУ теорема 1.6 сводит задачу к преобразованию исходной системы к виду (15) или (16), решению этих более простых систем и возврату к исходной системе с получением ее базиса Гильберта.

Если исходная система (17) сводится к уравнению (15), то нахождение базиса Гильберта последнего может быть получено на основе теоремы 1.1 (см. с. 10).

Замечание 1.1. В ряде случаев исходные системы одАНЛДУ могут иметь базис Гильберта меньшей размерности, нежели базисы Гильберта промежуточных систем одАНЛДУ. С вычислительной точки зрения это может приводить к большим расходам памяти в процессе преобразования.

Пример 1.11. рассмотрим систему одАНЛДУ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & x_2 + x_3 \end{cases}.$$

Входе преобразований системы одАНЛДУ получаем уравнение $x_4 = x_2 + x_3$. Данное уравнение имеет базис Гильберта

$$\mathcal{H}^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{array}{l} : x_2 \\ : x_3 \\ : x_4 \end{array}$$

В то же время исходная система одАНЛДУ имеет только тривиальное решение $x = \mathbb{O}^m$.

Замечание 1.2. Более типичными представляются случаи, когда исходная система одАНЛДУ имеет базис Гильберта, который не меньше, чем у промежуточных систем. Это следует из свойств уравнения Фробениуса с единичными коэффициентами (см. п. 1.1).

Пример 1.12 *(Приведение системы одАНЛДУ к виду* (15)*).* Пусть задана система одАНЛДУ:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 & = & 3x_4 + x_5 \\ x_2 & = & 5x_1 + 7x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ x_4 + x_5 & = & 3x_5 \end{cases}$$

Строим уравнение вида (12):

$$4x_1 - x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 0.$$

Применим преобразование системы ($c_2 = -1$). Следовательно, получаем правило вычисления значения переменной x_2:

$$x_2 = 5x_1 + 7x_3 + 2x_4 + 3x_5 = T_1(x_1, x_3, x_4, x_5).$$

Исключаем уравнение 2 и неизвестное x_2 из рассмотрения и получаем систему вида:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 & = & 3x_4 + x_5 \\ x_4 + x_5 & = & 3x_5 \end{cases}$$

Пересчитываем уравнение (12):

$$-x_1 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0.$$

Применим преобразование системы ($c_1 = -1$ и $c_3 = -1$). Получаем правило для вычисления переменных x_1 и x_3:

$$x_1 + x_3 = 3x_4 + x_5 = T_2(x_4, x_5).$$

Исключаем уравнение 1 и неизвестные x_1, x_3 из рассмотрения и в итоге у нас остается только одно уравнение. Следовательно, мы привели систему одАНЛДУ к виду (15):

$$\begin{cases} x_4 + x_5 & = & 3x_5 \\ x_1 + x_3 & = & T_2(x_4, x_5) \\ x_2 & = & T_1(x_1, x_3, x_4, x_5) \end{cases}$$

Нахождение базиса Гильберта для данной системы выглядит следующим образом:

$$x_4 = 2x_5.$$

Базис Гильберта для данного уравнения:

$$\mathcal{H}^{(2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{array}{l} : x_4 \\ : x_5 \end{array}$$

Применяем правило T_2:

$$x_1 + x_3 = T_2(x_4, x_5) = 3 * 2 + 1 * 1 = 7.$$

Это уравнение Фробениуса, которое имеет 7 решений:

$$\mathcal{H}^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{array}{l} : x_1 \\ : x_3 \\ : x_4 \\ : x_5 \end{array}$$

Применяем правило T_1:

$$x_2 = T_1(x_1, x_3, x_4, x_5) = 5x_1 + 7x_3 + 2x_4 + 3x_5.$$

Подставляя $\mathcal{H}^{(1)}$, получаем базис Гильберта для исходной системы одАНЛДУ.

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 42 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 44 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 46 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 48 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 50 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 52 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 54 \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 56 \\ 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример 1.13 *(Приведение системы одАНЛДУ к виду (*16*)).* Пусть задана система одАНЛДУ:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 & = & x_1 + 3x_3 \\ x_2 & = & x_2 + 5x_3 \\ x_4 & = & 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \end{cases}$$

Строим уравнение вида (12):

$$2x_1 + 3x_2 + 14x_3 - x_4 = 0.$$

Применим преобразование системы ($c_4 = -1$). Получаем правило для вычисления значения переменной x_4:

$$x_4 = 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = T_1(x_1, x_2, x_3).$$

Исключаем уравнение 3 и переменную x_4 из рассмотрения и получаем систему вида:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 & = & x_1 + 3x_3 \\ x_2 & = & x_2 + 5x_3 \end{cases}$$

Пересчитываем уравнение (12):

$$7x_3 = 0.$$

Больше нельзя применять преобразование системы. Полагаем переменную $x_3 = 0$, т.к. $c_3 > 0$. В итоге данная система приведена к виду (16):

$$\begin{cases} x_1 & = & x_1 \\ x_2 & = & x_2 \\ x_3 & = & 0 \\ x_4 & = & T_1(x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

Нахождение базиса Гильберта выглядит так: решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$

Базис Гильберта для этой системы:

$$\mathcal{H}^1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{array}{l} : x_1 \\ : x_2 \end{array}$$

Учитывая, что $x_3 = 0$ применяем правило для нахождения x_4 и получаем базис Гильберта для системы одАНЛДУ:

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

2 Генерация систем одАНЛДУ

С точки зрения ключевых приложений генерации систем одАНЛДУ — тестирования, экспериментального и сравнительного анализа, необходимо наличие библиотеки алгоритмов генерации. Это позволяет учесть разнообразие ограничений, накладываемых приложением на процесс и результат генерации, выбирая наиболее подходящий алгоритм из этой библиотеки. Единый теоретический аппарат, на основе которого возможна разработка таких алгоримов, был представлен в предыдущей главе. В настоящей главе нами предлагаются и обосновываются пять алгоритмов генерации систем одАНЛДУ, позволяющих решать широкий класс задач для упомянутых приложений.

В п. 2.1 выполняется постановка задачи генерации и представлена ее специфика для приложений тестирования и экспериментального анализа алгоритмов решения систем одАНЛДУ. В пп. 2.2, 2.3 и 2.4 предлагаются три алгоритма генерации частных классов систем одАНЛДУ. В п. 2.5 представлен алгоритм генерации систем содАНЛДУ. Алгоритм генерации произвольной системы одАНЛДУ дается в п. 2.6.

2.1 Задача генерации и ее приложения

Впервые системы одАНЛДУ были определены и исследованы в [5] на основе взаимосвязи систем НЛДУ и формальных грамматик. Там же был предложен и обоснован синтаксический алгоритм решения произвольной системы одАНЛДУ и показана полиномиальная сложность для наихудшего случая. Проведенные эксперименты с реализацией syntactic solver этого алгоритма также подтверждают его существенную эффективность для случая систем большой размерности.

В то же время, оставался открытым вопрос о качестве данной реализации алгоритма с точки зрения наличия в ней ошибок. Необходимо также комплексное экспериментальное исследование алгоритма для получения более точных оценок эффективности синтаксического алгоритма на практике и сравнение его с альтернативными решателями.

Таким образом, на примере данной практической задачи видно, что в общем случае необходим программный инструментарий для автоматической генерации:

1. тестовых систем одАНЛДУ с соответствующими базисами Гильберта;

2. выборки систем одАНЛДУ из заданного частного класса.

Первое необходимо для успешного решения задачи покрывающего системного тестирования реализации некоторого алгоритма решения системы одАНЛДУ, используя проверку правильности полученного алгоритмом решения. При этом тестовые системы могут генерироваться как для некоторых частных классов (тестирование на специфичных тестах), так и для общего случая — потенциально возможна генерация любой системы одАНЛДУ. Отметим, что используя понятие эквивалентных систем одАНЛДУ можно увеличить эффективность тестирования за счет быстрого получения новых тестовых систем путем перенумерации неизвестных в сгенерированной системе.

Второе важно при выполнении экспериментального анализа эффективности алгоритма решения и построения карты его эффективности для различных классов систем одАНЛДУ. Также это может использоваться для сравнительного анализа эффективности нескольких алгоритмов решения систем одАНЛДУ.

Тем самым, мы приходим к постановке следующей общей задачи генерации системы одАНЛДУ вида

$$\mathrm{E}^m(I^n)x = Ax \tag{18}$$

при заданных ограничениях на процесс и результат генерации. В простейшем случае, в качестве ограничений могут выступать лишь число уравнений n и неизвестных m. В более сложных случаях необходимо учитывать, например, ограничения на число базисных решений q или на элементы матрицы A. Основными ограничениями на сам процесс генерации обычно выступают требования на максимально допустимое время генерации и используемый объем памяти.

С вычислительной точки зрения данная задача не является такой простой, как может показаться на первый взгляд. Она не может быть сведена к непосредственной генерации матриц E и A. Во-первых, в таком случае будут порождаться системы одАНЛДУ, которые, как правило, несовместны (имеют пустой базис Гильберта) [5]. Во-вторых, для тестирования надо знать базис Гильберта генерируемой системы одАНЛДУ и использовать его при проверке решений, полученных тестируемым алгоритмом. В-третьих, экспериментальный и сравнительный анализы требуют системы из заданного частного класса.

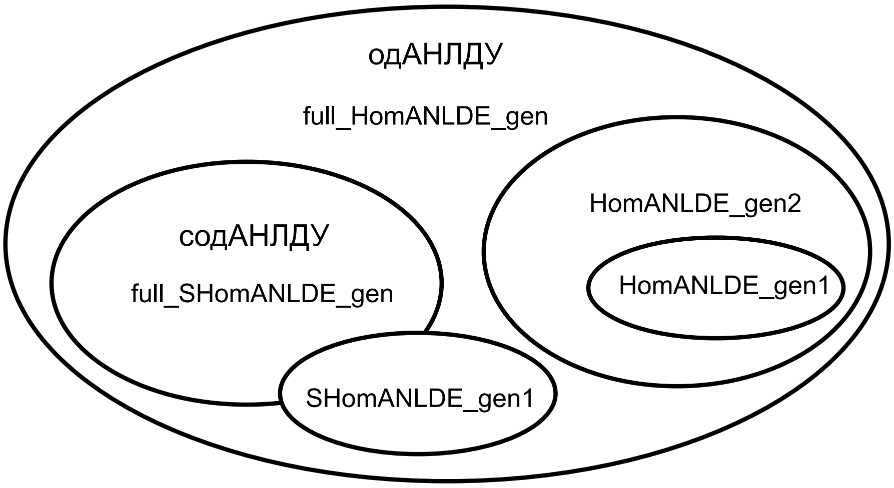

Рис. 4: Структура разбиения множества систем одАНЛДУ на классы, в соответствии с предлагаемыми алгоритмами генерации.

Соответствующие ограничения требуют информации, например, о форме базиса Гильберта и матрицы A, числе базисных решений и т.п.

В силу этого, задача генерации систем одАНЛДУ сталкивается с таким же проблемами вычислительной сложности, что и задача решения. В п. 1.4 было предложено преобразование систем одАНЛДУ, которое позволяет решить задачу генерации в общем случае. Нами разработаны четыре алгоритма генерации частных классов систем одАНЛДУ (включая такой класс как системы содАНЛДУ) и алгоритм генерации произвольной системы одАНЛДУ. Общая схема взаимоотношения этих алгоритмов в зависимости от генерируемых ими классов систем представлена на рис. 4. Алгоритмы генерации частных классов предлагают более простой метод генерации по сравнению с алгоритмом генерации произвольной системы одАНЛДУ.

В простейшем случае алгоритм генерации систем получает в качестве входных параметров лишь размерности генерируемой системы (число уравнений n, число неизвестных m, $0 < n \leqslant m$). Выходными параметрами являются разбиение множества неизвестных I^n, матрица коэффициентов правой части A, матрица коэффициентов левой части $\mathrm{E}^m(I^n)$ и базис Гильберта $\mathcal{H}$.

В качестве дополнительных ограничений на результат генерации могут выступать следующие:

- Максимально возможное значение коэффициентов матрицы A (в общем случае, ограничение на некоторую норму $||A||$);

- Максимально возможное значение компонент базисных решений (в общем случае, ограничение на некоторую норму $||\mathcal{H}||$);

- Максимально допустимое число базисных решений q.

Отметим, что возможны и другие ограничения, например, задание точного значения для числа базисных решений. Однако, ограничения в форме верхних границ существенно более просты для учета при построении алгоритма и, в то же время, достаточно гибкие, чтобы полученный алгоритм можно было использовать в приложениях.

Далее, при описании алгоритмов действия “генерируем случайным образом матрицу” и “выбираем случайным образом число” будут означать построение соответствующих объектов на основе стандартного датчика псевдослучайных чисел.

2.2 Алгоритм SHomANLDE_gen1 генерации систем одАНЛДУ с полностью единичным базисом Гильберта (аналог преобразования Гаусса — Жордано)

Пусть n и m фиксированы, причем $0 < n \leqslant m$. Идея алгоритма заключается в построении системы одАНЛДУ, базис Гильберта которой состоит из n стандартных единичных векторов пространства $\mathbb{Z}^m$:

$$\mathcal{H} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}. \tag{19}$$

Далее такой базис будем называть *единичным базисом Гильберта.*

Матрицу $\mathrm{E}^m(I^n)$ коэффициентов левой части строим как $\mathrm{E}^m(I^n) = (\mathbb{I} \mid B)$, где $\mathbb{I}$ — стандартная единичная $(n \times n)$-матрица ($\mathbb{I} = \mathrm{E}^n(\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\})$), а $B \in \{0,1\}^{n\times(m-n)}$ — произвольная $(0,1)$-матрица, для которой выполняется следующее условие:

$$\forall k \quad \sum_{i=1}^{n} B_{ik} = 1. \tag{20}$$

Матрицу A коэффициентов правой части строим как $A = (\mathbb{I} \mid B + \Delta)$, где матрица $\Delta \in \mathbb{Z}_+^{n\times(m-n)}$ удовлетворяет следующему условию:

$$\forall\, i \quad \sum_{j=1}^{m-n} \Delta_{ij} x_{j+n} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \mathbb{O}. \tag{21}$$

Очевидно, что условие (21) гарантируется при выполнении следующего условия:

$$\forall j \quad \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ij} > 0\,, \tag{22}$$

использование которого проще с точки зрения генерации матрицы Δ.

Таким образом, в матричном представлении генерируемая система одАНЛДУ выглядит следующим образом

$$(\mathbb{I} \mid B)x = (\mathbb{I} \mid B + \Delta)x. \tag{23}$$

Формальное описание шагов генерации представлено в Алгоритме 1. Отметим, что для генерации матрицы B (шаг 2) достаточно лишь для каждого из $m - n$ столбцов

Algorithm 1 Генерация системы одАНЛДУ с полностью единичным базисом Гильберта SHomANLDE_gen1

Require: n — число уравнений, m — число неизвестных, $n \leqslant m$.

Ensure: $(\mathrm{E}^m, A, \mathcal{H})$ для системы (23).

1: $\mathcal{H} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$;

2: генерируем случайным образом матрицу $B \in \{0,1\}^{n\times(m-n)}$, удовлетворяющую (20);

3: генерируем случайным образом матрицу $\Delta \in \mathbb{Z}_+^{n\times(m-n)}$, удовлетворяющую (22);

4: $\mathrm{E}^m := (\mathbb{I} \mid B)$; $A := (\mathbb{I} \mid B + \Delta)$. $\triangleright$ $\mathbb{I} \in \{0,1\}^{n\times n}$ — единичная матрица

случайным образом выбрать номер строки, в которой будет стоять единица, остальные элементы — нулевые. Для генерации матрицы Δ (шаг 3) необходимо обеспечить положительность хотя бы одного элемента в каждом из $m-n$ столбцов, остальные элементы полагаются произвольными нетрицательными целыми.

Теорема 2.1. *Базис Гильберта системы* (23) *есть* (19).

Доказательство. Переписывая систему (23) получаем

$$(\mathbb{I} \mid B)x = (\mathbb{I} \mid (B+\Delta))x \quad \Rightarrow \quad (\mathbb{O} \mid \Delta)x = \mathbb{O}.$$

Тем самым, $\mathbb{O}x' + \Delta x'' = \mathbb{O}$, где $x' = (x_1, \ldots, x_n)^\mathsf{T}$, $x'' = (x_{n+1}, \ldots, x_m)^\mathsf{T}$. Система $\Delta x'' = \mathbb{O}$ имеет только нулевое решение $x'' = \mathbb{O} \in \mathbb{Z}^{m-n}$ в силу условия (21). Решениями системы $\mathbb{O}x' = \mathbb{O}$ очевидно являются любые вектора из Z_+^n, а, значит, минимальные решения определяются базисом (19). $\square$

Согласно теореме 1.6 задача нахождения базиса Гильберта для системы (23) сводится к задаче нахождения базиса Гильберта для системы вида (16)

$$\mathbb{O}x = \mathbb{O}.$$

Данный алгоритм является аналогом преобразования Гаусса — Жордано, т.к. матрица коэффициентов A приведена к матрице, содержащей единичную подматрицу.

Пример 2.1. **Вход:** $n = 3, \quad m = 4$

Шаг 1: $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **Шаг 2:** $B = (1,0,0)^\mathsf{T}$. **Шаг 3:** $\Delta = (2,2,3)^\mathsf{T}$.

Шаг 4: $\mathrm{E}^4 = (\mathbb{I} \mid B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A = (\mathbb{I} \mid B + \Delta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2.3 Алгоритм HomANLDE_gen1 генерации систем одАНЛДУ с частично единичным базисом Гильберта (аналог преобразования Гаусса)

Пусть n и m фиксированы, причем $0 < n < m$. Идея алгоритма заключается в построении системы одАНЛДУ, базис Гильберта которой частично состоит из единичных векторов:

$$\mathcal{H} = \text{ множество столбцов матрицы } (F \mid \mathbb{I})^{\mathsf{T}}, \tag{24}$$

где $\mathbb{I}$ — стандартная единичная $((m-n)\times(m-n))$-матрица ($\mathbb{I} = \mathrm{E}^{m-n}(\{1\},\{2\},\dots,\{m-n\})$), а $F \in \mathbb{Z}_+^{(m-n)\times n}$. Элементы матрицы F будут определяться после генерации коэффициентов системы одАНЛДУ на основе подстановки базиса Гильберта. Далее такой базис будем называть *частично единичным базисом Гильберта.*

Матрицу E^m коэффициентов левой части строим как $\mathrm{E}^m = (\mathbb{I} \mid B)$, где $\mathbb{I}$ — стандартная единичная $(n\times n)$-матрица ($\mathbb{I} = \mathrm{E}^n(\{1\},\{2\},\dots,\{n\})$), а $B \in \{0,1\}^{n\times(m-n)}$ — произвольная $(0,1)$-матрица, удовлетворяющая условию (20). Матрицу A коэффициентов правой части строим как $A = (D^+ \mid B+\Delta)$, где $D^+ \in \mathbb{Z}_+^{n\times n}$, т. ч.

$$D^+_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{, если } i \geqslant j, \\ d_{ij} \in \mathbb{Z}_+ & \text{, если } i < j+1, \\ d_{ij} \in \mathbb{N} & \text{, если } i = j+1, \end{cases} \tag{25}$$

а матрица $\Delta \in \mathbb{Z}_+^{n\times(m-n)}$ удовлетворяет следующему условию:

$$\forall j \quad \Delta_{nj} > 0. \tag{26}$$

Таким образом, в матричном представлении система одАНЛДУ выглядит следующим образом

$$(\mathbb{I} \mid B)x = (D^+ \mid B+\Delta)x. \tag{27}$$

Формальное описание шагов генерации представлено в Алгоритме 2. Реализация ша-

---

Algorithm 2 Генерация системы одАНЛДУ с частично единичным базисом Гильберта HomANLDE_gen1

Require: n — число уравнений, m — число неизвестных, $n < m$.

Ensure: $(\mathrm{E}^m, A, \mathcal{H})$ для системы (27).

1: генерируем случайным образом матрицу $D^+ \in \mathbb{Z}_+^{n\times n}$, удовлетворяющую (25);

2: генерируем случайным образом матрицу $B \in \{0,1\}^{n\times(m-n)}$, удовлетворяющую (20);

3: генерируем случайным образом матрицу $\Delta \in \mathbb{Z}_+^{n\times(m-n)}$, удовлетворяющую (26);

4: вычисляем матрицу $F \in \mathbb{Z}_+^{(m-n)\times n}$;

5: $\mathrm{E}^m := (\mathbb{I} \mid B)$; $A := (D^+ \mid B+\Delta)$; $\mathcal{H} := \{F \mid \mathbb{I}\}^{\mathsf{T}}$. $\triangleright$ $\mathbb{I} \in \{0,1\}^{n\times n}$ — единичная матрица

гов 1–3 генерации матриц D^+, B и Δ очевидна. Реализация шага 4 основана на постановке базиса Гильберта, начиная с единичного базиса, и представлена в доказательстве теоремы 2.2.

Теорема 2.2. *Базис Гильберта системы (27) есть (24).*

Доказательство. Согласно теореме 1.6 произведем преобразование системы (18)

$$(\mathbb{I} \mid B)x = (D^+ \mid (B+\Delta))x \quad \Rightarrow \quad ((D^+ - \mathbb{I}) \mid \Delta)x = \mathbb{O}.$$

Тем самым, $(D^+ - \mathbb{I})x' + \Delta x'' = \mathbb{O}$, где $x' = (x_1, \dots, x_n)^\mathsf{T}$, $x'' = (x_{n+1}, \dots, x_m)^\mathsf{T}$. В силу специфики построения матрицы $(D^+ - \mathbb{I})$ и условия (26) с помощью преобразования произвольной системы одАНЛДУ система будет преобразована к уравнению вида (15):

$$x_n = \sum_{j=1}^{m-n} \Delta_{nj} x_{j+n}.$$

Согласно теореме 1.1 (см. п. 1.2, с. 10) базис Гильберта данного уравнения есть

$$\mathcal{H} = \text{ множество столбцов матрицы } \{F' \mid \mathbb{I}\}^\mathsf{T},$$

где F' определяется решениями уравнений Фробениуса с единичными коэффициентами. Вычисляя базис Гильберта в обратном порядке получаем (24). $\square$

Согласно теореме 1.6 задача нахождения базиса Гильберта для системы (27) сводится к задаче нахождения базиса Гильберта для уравнения вида (15)

$$x_n = \sum_{j=1}^{m-n} \Delta_{nj} x_{j+n}.$$

Данный алгоритм является аналогом преобразования Гаусса, т.к. матрица коэффициентов приведена к ступенчатому виду.

Пример 2.2. **Вход:** $n = 3, \quad m = 5$

Шаг 1: $D^+ = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **Шаг 2:** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **Шаг 3:** $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Шаг 4: $F = \begin{pmatrix} 47 & 19 & 3 \\ 52 & 20 & 4 \end{pmatrix}$. **Шаг 5:** $\mathrm{E}^5 = (E \mid B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A = (D^+ \mid B + \Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H} = (F \mid E)^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 47 & 52 \\ 19 & 20 \\ 3 & 4 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4 Алгоритм HomANLDE_gen2 генерации систем одАНЛДУ с обобщенным частично единичным базисом Гильберта

Пусть n и m фиксированы, причем $0 < n < m$. Формальное описание алгоритма представлено в Алгоритме 3.

Algorithm 3 Генерация системы одАНЛДУ с обобщенным частично единичным базисом Гильберта HomANLDE_gen2

Require: n — число уравнений, m — число неизвестных, $n < m$.

Ensure: $(\mathrm{E}^m, A, \mathcal{H})$.

1: генерируем случайным образом число $p \in \{0, \dots, m-n-1\}$ и последовательность $0 < k_1 < \dots < k_n = n+p+1$;

2: генерируем случайным образом матрицу $B \in \{0,1\}^{n\times(m-n-p)}$, удовлетворяющую (20);

3: генерируем случайным образом матрицу $\Delta \in \mathbb{Z}_+^{n\times(m-n-p)}$, удовлетворяющую (26);

4: строим матрицу E^m вида (28);

5: генерируем случайным образом матрицу A вида (29);

6: с помощью преобразования теоремы 1.6 строим базис $\mathcal{H}$.

Идея алгоритма заключается в построении системы одАНЛДУ, которая может быть преобразована (теорема 1.6) к уравнению вида (15). Как и в предыдущем алгоритме, базис Гильберта вычисляется после генерации коэффициентов системы. Структура базиса будет представлена ниже.

Матрицу E^m коэффициентов левой части строим как

$$\mathrm{E}^m = \left(\ \mathbb{I}' \,\middle|\, B\ \right), \tag{28}$$

где $\mathbb{I}' = \mathrm{E}^{n+p}(\{1,\dots,k_1-1\},\{k_1,\dots,k_2-1\},\dots,\{k_{n-1},\dots,k_n-1\})$ или

$$\mathbb{I}' = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots\dots\dots\dots & & & 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & & 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$B \in \{0,1\}^{n\times(m-n-p)}$ — произвольная $(0,1)$-матрица, удовлетворяющая условию (20), а $0 < k_1 < k_2 < \dots < k_n = n+p+1$ — некоторая возрастающая последовательность положительных целых чисел ($0 \leqslant p \leqslant m-n-1$ — произвольная константа).

Матрицу A коэффициентов правой части строим как

$$A = \left(\ \mathbb{O} \,\middle|\, A_+ \,\middle|\, B+\Delta\ \right), \tag{29}$$

где

$$A_+ = \begin{pmatrix} a_{1k_1} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & a_{1(n+p)} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{2k_2} \quad \ldots & a_{2(n+p)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & 0 \end{pmatrix},$$

$a_{ij} \geqslant 0$, $a_{ik_i} > 0$ и матрица $\Delta \in \mathbb{Z}_+^{n\times(m-n-p)}$ удовлетворяет условию (26).

Таким образом, в матричном представлении система одАНЛДУ выглядит следующим образом

$$\left(\ \mathbb{I}' \ \middle| \ B \ \right) x = \left(\ \mathbb{O} \ \middle| \ A_+ \ \middle| \ B+\Delta \ \right) x. \tag{30}$$

Базис Гильберта $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H} = \text{ множество столбцов матрицы } (F|\mathbb{I}')^{\mathsf{T}} \tag{31}$$

может быть представлен в виде $\{h^{(s)}\}_{s=1}^{q}$, где q — размерность базиса. Каждый вектор $h^{(s)}$ удовлетворяет следующиему набору условий:

$$\begin{cases} h_i^{(s)} \in \{0,1\}, \text{ если } i \geqslant k_n \text{ и } \sum\limits_{j=k_n}^{m} h_j^s = 1, \\ h_i^{(s)} = \sum\limits_{j=k_r}^{m} a_{rj}h_j^{(s)} - \sum\limits_{j\in\{\overline{k_{r-1},k_r-1}\}\setminus i} h_j, \text{ если } i < k_n, \text{ где } r \text{ т.ч. } i \in I_r. \end{cases}$$

Далее такой базис будем называть *обобщенным частично единичным базисом Гильберта.*

Теорема 2.3. *Базис Гильберта системы* (30) *есть* (31)*.*

Доказательство. Согласно теореме 1.6 произведем преобразование системы (30)

$$(\mathbb{I}' \mid B)x = (\mathbb{O} \mid A_+ \mid B+\Delta)x \quad \Rightarrow \quad ((\mathbb{O} \mid A_+) - \mathbb{I}' \mid \Delta)x = \mathbb{O}.$$

Тем самым, $((\mathbb{O} \mid A_+) - \mathbb{I})x' + \Delta x'' = \mathbb{O}$, где $x' = (x_1, \ldots, x_{n+p})^{\mathsf{T}}$, $x'' = (x_{n+p+1}, \ldots, x_m)^{\mathsf{T}}$. В силу специфики построения матрицы $((\mathbb{O} \mid A_+) - \mathbb{I})$ и условия (26) с помощью преобразования произвольной системы одАНЛДУ система будет преобразована к уравнению вида (15):

$$\sum_{i=k_{n-1}}^{k_n-1} x_i = \sum_{j=1}^{m-n-p} \Delta_{nj}x_{j+n+p}.$$

Согласно теореме 1.1 (см. п. 1.2, с. 10) базис Гильберта данного уравнения есть

$$\mathcal{H} = \text{ множество столбцов матрицы } \{F' \mid \mathbb{I}'\}^{\mathsf{T}},$$

где F' определяется решениями уравнений Фробениуса с единичными коэффициентами. Вычисляя базис Гильберта в обратном порядке получаем (31). $\square$

Согласно теореме 1.6 задача нахождения базиса Гильберта для системы (30) сводится к задаче нахождения базиса Гильберта для уравнения (15)

$$\sum_{i=k_{n-1}}^{k_n-1} x_i = \sum_{j=1}^{m-n-p} \Delta_{nj} x_{j+n+p}.$$

Данный алгоритм является расширенным аналогом преобразования Гаусса, т.к. матрица коэффициентов A приведена к более общему ступенчатому виду.

Пример 2.3. **Вход:** $n = 3, \quad m = 6$.

Шаг 1: $p = 1$, $k_1 = 3$, $k_2 = 4$, $k_3 = 5$. **Шаг 2:** $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **Шаг 3:** $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Шаг 4: $\mathrm{E}^6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **Шаг 5:** $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Шаг 6: $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 & 18 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.5 Алгоритм full_SHomANLDE_gen генерации симметричных систем одАНЛДУ

Пусть m и n фиксированы, причем $0 < n < m$. Формальное описание алгоритма представлено в Алгоритме 4.

Данный метод генерирует систему содАНЛДУ (8) с учетом накладываемых на размерность базиса Гильберта ограничений. Алгоритм 4 позволяет генерировать системы содАНЛДУ, даже в случае, если одна из матриц разбиения (например, $\mathrm{E}^m(I^n)$) фиксирована.

В случае пустого базиса Гильберта, система преобразуется для получения базисного решения в виде единичного вектора (шаги 3–7). Дальнейшие действия (шаги 8–14) основаны на методе построения системы содАНЛДУ с минимальным базисом Гильберта (см. доказательство теоремы 1.5).

Согласно теореме 1.4 базис Гильберта состоит из $\{0, 1\}$-векторов.

Пример 2.4. **Вход:** $n = 3$, $m = 7$, максимум $= 4$.

Шаг 1. $\mathrm{E}^7(I^3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{E}^7(J^3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Algorithm 4 Генерация системы содАНЛДУ с базисом Гильберта full_SHomANLDE_gen

Require: n — число уравнений, m — число неизвестных, $0 < n < m$, оганичения на размерность базиса Гильберта.

Ensure: $(\mathrm{E}^m(I^n), \mathrm{E}^m(J^n), \mathcal{H})$.

1: Генерируем случайным образом матрицы $\mathrm{E}^m(I^n)$ и $\mathrm{E}^m(I^n)$.
2: Находим базис Гильберта $\mathcal{H}$.
3: **if** базис Гильберта пуст **then**
4: Выбираем случайным образом неизвестное x_i, $1 \leqslant i \leqslant m$.
5: p т.ч. $J_i^n = p$, z т.ч. $I_i^n = 1$. ▷ номера уравнений, в которых встречается неизвестное x_i.
6: $\mathrm{E}^m(J^n)_{pk} = 0$, $\mathrm{E}^m(J^n)_{zk} = 1$, $\mathcal{H} = \{e_i\}$.
7: **end if**
8: **if** количество базисных векторов $>$ максимума **then**
9: уравнение p с минимальным номером среди уравнений i, для которых выполняется условие $\forall j \sum I_j > \sum I_i$.
10: **repeat**
11: Выбираем произвольным образом $0 < z < m$ т.ч. $z \in J_k$, $k \neq p$.
12: $\mathrm{E}^m(J^n)_{kz} = 0$, $\mathrm{E}^m(J^n)_{pz} = 1$.
13: **until** размерность базиса Гильберта больше максимума.
14: **end if**

Шаг 2. $\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\0\\1\\1 \end{pmatrix} \right\}$.

Шаг 3. Базис Гильберта не пуст. Переходим на Шаг 8.

Шаг 8. Базис Гильберта больше максимума.

Шаг 9. $p = 2$. **Шаг 11.** $z = 3$, $k = 3$. **Шаг 12.** $\mathrm{E}^7(J^3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\0\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Шаг 13. Базис Гильберта больше максимума. Переходим на Шаг 11.

Шаг 11. $z = 6$, $k = 3$. **Шаг 12.** $\mathrm{E}^7(J^3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Шаг 13. Размер базиса Гильберта равен максимуму. Выход из цикла.

2.6 Алгоритм full_SHomANLDE_gen генерации произвольной системы одАНЛДУ

Пусть n и m фиксированы, причем $0 < n \leqslant m$. Формальное описание алгоритма генерации представлено в Алгоритме 5.

Данный метод строит произвольную систему одАНЛДУ, т.к. в основе алгоритма лежит преобразование произвольной системы одАНЛДУ.

Матрицу E коэффициентов левой части строим как

$$\mathrm{E}^m = \left(\begin{array}{c|c|c} E' & \multicolumn{2}{c}{B} \\ \hline \mathbb{O} & B'' & B' \end{array} \right), \tag{32}$$

где $E' = \mathrm{E}^{q+p}(\{1, \ldots, k_1 - 1\}, \{k_1, \ldots, k_2 - 1\}, \ldots, \{k_{n-1}, \ldots, k_q - 1\})$ или

$$E' = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \\ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

$e_{ij} = 1$, $B \in \{0,1\}^{q\times(m-q-p)}$, $B'' \in \{0,1\}^{(n-q)\times t}$ и $B' \in \{0,1\}^{(n-q)\times(m-q-p-t)}$ — произвольные

Algorithm 5 Генерация произвольной системы одАНЛДУ с базисом Гильберта full_HomANLDE_gen

Require: n — число уравнений, m — число неизвестных, $n \leqslant m$.

Ensure: $(\mathrm{E}^m, A, \mathcal{H})$.

1: генерируем случайным образом числа $0 \leqslant q \leqslant n$, $0 \leqslant p < m-q$, $0 \leqslant t < m-q-p$ и последовательность $0 < k_1 < \cdots < k_q = q+p+1$;

2: генерируем случайным образом матрицы $B \in \{0,1\}_+^{q\times(m-q-p)}$, $B' \in \{0,1\}_+^{(n-q)\times(m-q-p-t)}$, $B'' \in \{0,1\}_+^{(n-q)\times t}$, удовлетворяющие условию (34);

3: генерируем случайным образом матрицу $B''' \in \{0,1\}^{(n-q)\times(m-q-p-t)}$, удовлетворяющую условию (37);

4: генерируем случайным образом матрицу $\Delta \in \mathbb{Z}_+^{n\times(m-q-p)}$, удовлетворяющую (38);

5: генерируем случайным образом матрицу $\Delta' \in \mathbb{Z}_+^{(n-q)\times t}$, удовлетворяющую условию (39);

6: генерируем случайным образом матрицу $A' \in \mathbb{Z}^{q\times(q+p)}$, удовлетворяющую (36);

7: генерируем случайным образом матрицу $E' \in \mathbb{Z}^{q\times(q+p)}$, удовлетворяющую (33);

8: строим матрицу E^m вида (32);

9: строим матрицу A вида (35);

10: с помощью преобразования теоремы 1.6 строим матрицу $\mathcal{H}$.

$(0,1)$-матрицы, для которых выполняется следующее условие:

$$\begin{gathered}\forall j = 1,\dots,m-q-p-t \quad \sum_{i=1}^{q} B_{i(t+j)} + \sum_{i=1}^{n-q} B'_{ij} = 1,\\ \forall j = 1,\dots,t \quad \sum_{i=1}^{q} B_{ij} + \sum_{i=1}^{n-q} B''_{ij} = 1.\end{gathered} \tag{34}$$

$\{k_1, k_2, \dots, k_{q-1}, k_q = q+p+1\}$ произвольная последовательность возрастающих чисел: $0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_q = q+p+1$, $e_{ij} = 1$, $0 \leqslant q \leqslant n$, $0 \leqslant p < m-q$, $0 \leqslant t < m-q-p$ — произвольные константы. При этом q — количество допустимых преобразований системы одАНЛДУ, p — количество переменных, которые дополнительно выражаются в ходе преобразований системы, t — количество переменных, которые приравниваются к 0 при приведении системы к виду содАНЛДУ.

Матрицу A коэффициентов правой части строим как

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A' & \multicolumn{2}{c}{B+\Delta} \\ \hline \mathbb{O} & B''+\Delta' & B''' \end{array}\right), \tag{35}$$

$$A' = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1(k_1-1)} & a_{1k_1} & \dots & a_{1(k_2-1)} & a_{1k_2} & \dots\dots & & a_{1(q+p)} \\ 0 & \dots & 0 & d_{2k_1} & \dots & d_{2(k_2-1)} & a_{2k_2} & \dots\dots & & a_{2(q+p)} \\ 0 & \dots\dots & & & & & & d_{q(k_q-1)} & \dots & d_{q(q+p)} \end{pmatrix} \tag{36}$$

где $a_{ij} \geqslant 0$, $a_{ij} > 0$ если $k_i \leqslant j < k_{i+1}$, $d_{ij} \in \{0,1\}$ и $\forall i \ \exists j$ т.ч. $d_{ij} = 0$. $B''' \in \{0,1\}^{(n-q)\times(m-q-p-t)}$ т.ч.

$$\forall j \quad \sum_i B'''_{ij} = 1. \tag{37}$$

Матрица $\Delta \in \mathbb{Z}_+^{q\times(m-q-p)}$ удовлетворяет следующему условию:

$$\forall\, j \quad \Delta_{qj} > 0. \tag{38}$$

Матрица $\Delta' \in \mathbb{Z}_+^{(n-q)\times(t)}$ удовлетворяет следующему условию:

$$\forall\, j \quad \sum_i \Delta'_{ij} > 0. \tag{39}$$

В матричном представлении система одАНЛДУ выглядит следующим образом

$$\left(\begin{array}{c|c|c} E' & \multicolumn{2}{c}{B} \\ \hline \mathbb{O} & B'' & B' \end{array}\right) x = \left(\begin{array}{c|c|c} A' & \multicolumn{2}{c}{B+\Delta} \\ \hline \mathbb{O} & B''+\Delta' & B''' \end{array}\right) x. \tag{40}$$

Теорема 2.4. *С помощью преобразования теоремы* 1.6 *система (*40*) может быть приведена либо к виду (*15*), если $q = n$; либо к виду (*16*), если $q < n$.*

Доказательство. 1). Пусть $q = n$. Следовательно мы получаем систему

$$(E' \mid B)x = (A' \mid B+\Delta)x \quad \Rightarrow \quad (A'-E')x' + \Delta x'' = \mathbb{O}$$

$x' = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathsf{T}}$, $x'' = (x_{n+1}, \ldots, x_m)^{\mathsf{T}}$. В силу специфики построения матрицы $(A' - E')$ и условия (38) с помощью преобразования теоремы 1.6 система может быть преобразована к уравнению вида (15). Согласно теореме 1.1 находим базис Гильберта данного уравнения. Вычисляя базис Гильберта в обратном порядке получаем базис Гильберта для системы (18).

2). Пусть $q < n$. Следовательно получаем систему

$$\left(\begin{array}{c|c|c} E' & \multicolumn{2}{c}{B} \\ \hline \mathbb{O} & B'' & B' \end{array}\right) x = \left(\begin{array}{c|c|c} A' & \multicolumn{2}{c}{B+\Delta} \\ \hline \mathbb{O} & B''+\Delta' & B''' \end{array}\right) x \Rightarrow \left(\begin{array}{c} A'-E' \\ \hline \mathbb{O} \end{array}\right) x' + \left(\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\Delta} \\ \hline \Delta' & B'''-B' \end{array}\right) x'' = \mathbb{O}$$

С помощью преобразования теоремы 1.6 данная система приводится к системе

$$(\Delta' \mid B''' - B')\, x'' = \mathbb{O}.$$

В силу свойства матрицы Δ' решение данной системы сводится к решению системы

$$(B''' - B')\, x''' = \mathbb{O}.$$

что соответствует системе вида (16). Находим базис Гильберта данной системы, вычисляем базис в обратном порядке и получаем базис Гильберта для системы (18). $\square$

Согласно теоремы 1.6 задача нахождения базиса Гильберта для системы (18) сводится к задаче нахождения базиса Гильберта либо для системы вида (15), либо для системы вида (16).

Пример 2.5. **Вход:** $n = 5, \quad m = 7$.

Шаг 1: $q = 2$, $p = 0$, $t = 0$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. **Шаг 2:** $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B'' = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$. **Шаг 3:** $B''' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Шаг 4: $\Delta = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. **Шаг 5:** $\Delta' = \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$. **Шаг 6:** $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Шаг 7: $E' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. **Шаг 8:** $\mathrm{E}^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Шаг 9: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **Шаг 10:** $\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 5 \\ 8 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Заключение

В качестве результатов данной работы можно выделить следующие.

— Выполнено развитие понятийного аппарата систем АНЛДУ. Введены компактные обозначения для однородных систем АНЛДУ и симметричных систем одАНЛДУ.

— Исследован вид базиса Гильберта для системы одАНЛДУ, состоящей из одного уравнения (теорема 1.1).

— Получен ряд свойств для систем содАНЛДУ. На основе графового представления исследован вопрос о разрешимости таких систем, получены и доказаны основные свойства их базисных решений (теоремы 1.2–1.5).

— Сформулирована теорема 1.6 о преобразовании произвольной системы одАНЛДУ к к виду системы содАНЛДУ или к случаю системы одАНЛДУ с одним уравнением.

— Выполнена постановка задачи генерации частных классов систем одАНЛДУ. Разработаны четыре алгоритма генерации частных классов систем одАНЛДУ, включая алгоритм генерации систем содАНЛДУ, и один алгоритм генерации произвольной системы одАНЛДУ.

Приложение

Связь систем одАНЛДУ с контекстно-свободными грамматиками

Произвольная система одАНДДУ (1) ассоциирована с КС-грамматикой следующим образом [5]. Грамматика состоит из m правил $(r_i)_{i=1}^m$ и n нетерминалов $(\mathcal{A}_k)_{k=1}^n$. Нетерминальный алфавит пуст. Для каждого нетерминала $\mathcal{A}$ введем обозначение $|\alpha|_\mathcal{A}$ для числа вхождений $\mathcal{A}$ в строку α. Отображение Парикха Ψ_n от $\{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n\}^*$ в $\mathbb{Z}_+^n$ определено как $\Psi_n(\alpha) = (|\alpha|_{\mathcal{A}_1}, |\alpha|_{\mathcal{A}_2}, \ldots, |\alpha|_{\mathcal{A}_n})$. Правило грамматики $r_i = (\mathcal{A}_k \to \alpha_i)$ для некоторого $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и нетерминальной цепочки α_i. Это правило определяет, что $\mathrm{E}_{ki} = 1$, $\mathrm{E}_{ji} = 0\ \forall\, j \neq k$ и i-й столбец матрицы A есть $\Psi_n(\alpha_i)$.

Таким образом, неизвестные системы одАНЛДУ ассоциированы с правилами грамматики а уравнения — с нетерминалами. Значение x_i определяет количество применений правила r_i в некотором выводе. Существует соответствие между множеством всех решений системы одАНЛДУ и множеством всех циклических выводов $A_k \Rightarrow^* A_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ в грамматике. Любое решение связано с соответствующим выводом (выводами) и наоборот (см. [5] для деталей и доказательств, некоторые примеры также могут быть найдены в [6]). Оригинальная идея восходит к M. Filgueiras и A. P. Tomás [20].

Пример 2.6. Для примера 1.3 соответствующая КС-грамматика

$$\begin{aligned} r_1:&\quad A \to B^5\\ r_2:&\quad B \to \varepsilon\\ r_3:&\quad A \to B^7\\ r_4:&\quad C \to A^2B^2\\ r_5:&\quad C \to AB^3C^3 \end{aligned}$$

Например, базисное решение $h^{(1)} = (5, 32, 0, 2, 1)^\mathsf{T}$ соответствует в циклическому выводу $C \xRightarrow{r_5} AB^3C^3 \xRightarrow{2\times r_4} A^5B^7C \xRightarrow{5\times r_1} B^{32}C \xRightarrow{32\times r_2} C$.

Список литературы

[1] Богоявленский Ю. А., Дуплихин М. Ю. *Некоторые направления современных исследований алгоритмов линейного прогрммирования* // Труды Петрозаводского государственного университета. Сер. “Прикладная математика и информатика”. Вып. 7. — Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 1998. — С. 209–222.

[2] Богоявленский Ю. А., Корзун Д. Ж. *Общий вид решения системы линейных диофантовых уравнений, ассоциированной с контекстно-свободной грамматикой* // Труды Петрозаводского государственного университета. Сер. “Прикладная математика и информатика”. Вып. 6. — Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 1997. — С. 79–94.

[3] Корзун Д. Ж. *Об одной взаимосвязи формальных грамматик и систем линейных диофантовых уравнений* // Вестник молодых ученых, 2000. № 3. — СПб: Изд-во СПбГТУ, 2000. — С. 50–56.

[4] Корзун Д. Ж. *Решение одного класса линейных диофантовых уравнений в неотрицательных целых числах методами теории формальных языков* // Труды Петрозаводского государственного университета. Сер. “Прикладная математика и информатика”. Вып. 7. — Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 1999. — С. 93–116.

[5] Корзун Д. Ж. *Синтаксические алгоритмы решения неотрицательных линейных диофантовых уравнений и их приложение к моделированию структуры нагрузки канала Интернет.* Дисс. на соиск. канд. физ.-мат. наук. Петрозаводск, ПетрГУ, 2002. 185 с.

[6] Корзун Д. Ж. *Grammar-Based Algorithms for Solving Certain Classes of Nonnegative Linear Diophantine Systems* // Труды международного семинара Finnish Data Processing Week at the University of Petrozavodsk (FDPW’2000): Advances in Methods of Modern Information Technology. Vol. 3. — Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2001. — С. 52–67.

[7] Корзун Д. Ж. *Syntactic Methods in Solving Linear Diophantine Equations* // Труды международного семинара Finnish Data Processing Week at the University of Petrozavodsk (FDPW’2004): Advances in Methods of Modern Information Technology. Vol. 6. — Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2005. — С. 151–156.

[8] Корзун Д. Ж., Богоявленский Ю. А., Кулаков К. А., Сало А. Ю., Крышень М. Ю., Ананьин А. В. *Система Web-SynDic для демонстрации и тестирования синтаксических алгоритмов решения линейных диофантовых уравнений в неотрицательных целых числах* // Материалы Всероссийской конференции "Научный сервис в сети интернет ’2004". Москва, 2004. — С. 8–10.

[9] Кострикин А. И., Манин Ю. И. *Линейная алгебра и геометрия.* — М.: Наука, 1986.

[10] Кулаков К. А. *Однородные ассоциированные с формальными грамматиками системы неотрицательных линейных диофантовых уравнений* // Материалы 57-й научной студенческой конференции ПетрГУ. Секция «Информатика». Принято к печати. — Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2005.

[11] Кулаков К. А. *Технология автоматизации тестирования алгоритмов решения неотрицательных линейных диофантовых уравнений* // Материалы межвузовского конкурса-конференции "Технологии Microsoft в теории и практике программирования". — СПб: Издательство СПбГПУ, 2004. — С. 142–143.

[12] Кулаков К. А. *Технология тестирования, экспериментального анализа и сравнения алгоритмов решения неотрицательных линейных диофантовых систем* // Материалы 54-й научной студенческой конференции ПетрГУ. Секция «Информатика». — Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2002. — С. 173–174.

[13] Кулаков К. А. Корзун Д. Ж. *Generating Homogenious Systems of Equations for Testing and Experimental Analysis of Linear Diophantine Solvers* // Труды международного семинара Finnish Data Processing Week at the University of Petrozavodsk (FDPW'2003): Advances in Methods of Modern Information Technology. Vol. 5. — Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2005. — С. 259–278.

[14] Кулаков К. А., Сало А. Ю., Ананьин А. В., Крышень М. Ю. *Web-SynDic — система демонстрации и тестирования синтаксических алгоритмов решения неотрицательных линейных диофантовых уравнений* // Материалы межвузовского конкурса-конференции "Технологии Microsoft в теории и практике программирования". — СПб: Издательство СПбГПУ, 2004. — С. 43–44.

[15] Нефедов В. Н., Осипова В. А. *Курс дискретной математики.* — М.: Изд-во МАИ, 1992. — 264 с.

[16] Смирнова Е. С. *Разработка и реализация алгоритма обработки нечетких данных в многоуровневых логиках.* Дисс. на соиск. канд. физ.-мат. наук. Санкт-Петербург, Санкт-Петербургский государственный университет, 2002. 135 с.

[17] Схрейвер А. *Теория линейного и целочисленного программирования* : Пер. с англ. Т.1. — М.: Мир, 1991. — 360 с.; Т.2. — М.: Мир, 1991. — 342 с.

[18] Contejean E., Devine H. *An efficient incremental algorithm for solving systems of linear diophantine equations* // Information and Computation. — 1994. Vol. 113. No. 1. — pp. 143–172.

[19] Domenjoud E., Tomás A. P. *From Elliot-MacMahon to an algorithm for general constraints on naturals* // In U. Montanari, F. Rossi (eds.), Principles and Practice of Constraint Programming (CP'95). Springer–Verlang, 1995. LNCS 976. — PP. 18–35.

[20] Filgueiras M., Tomás A. P. *Solving Linear Constraints on Finite Domains through Parsing* // In P. Barahona, L. Moniz Pereira, A. Porto (eds.), Proceedings of the 5th Portuguese Conference on Artificial Intelligence, Springer-Verlag, 1991. LNAI 541. — PP. 1–16.

[21] Giles F., Pulleyblank F. *Total dual integrality and integer polyedra.* Linear algebra and its applications. No. 25, 1979. pp. 191–196.

[22] Huet G. *An algorithm to generate the basis of solutions to homogenous linear diophantine equations* // Information Processing Letters. — 1978. Vol. 3. No. 7. — PP. 144–147.

[23] Pottier L. *Minimal solutions of linear diophantine systems: bounds and algorithms* // Proceedings of the 4th International Conference on Rewriting Techniques and Applications (RTA'91), Como (Italy). — 1991. — PP. 162–173

[24] Tomás A. P., Filgueiras M. *Algorithms for solving Diophantine Equations in Naturals.* DCC-FC & LIACC, Universidade do Porto, 2001.
`http://www.ncc.up.pt/ apt/dioph/`

[25] Tomás A. P., Filgueiras M. *An algorithm for solving systems of linear Diophantine equations in naturals* // In E. Costa, A. Cardoso (eds.), Progress in Artificial Intelligence (EPIA'97). Springer-Verlag, 1997. LNAI 1323. — PP. 73–84.