# КВАДРАТИЧНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

В. Н. Малозёмов

Эта статья написана на основе трёх лекций, которые автор прочитал в университете Калабрии (Италия) в мае 1999 г. по приглашению проф. Манлио Гаудиозо. Статья представляет собой нестандартное введение в вариационное исчисление, математически строгое и согласованное в идейном плане с теорией конечномерных экстремальных задач.

## 1. Постановка задачи. Критерий оптимальности

Обозначим через $C[a,b]$ и $C^1[a,b]$ линейные пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций соответственно. Зафиксируем функции $p$, $q$, $f$ из $C[a,b]$ и определим на $C^1[a,b]$ *интегральный квадратичный функционал в канонической форме*:

$$Q(x) = \int_a^b \big\{ p(t)\big[x'(t)\big]^2 + q(t)\big[x(t)\big]^2 - 2f(t)x(t) \big\} dt.$$

Нас интересует квадратичная вариационная задача следующего вида:

$$\begin{gathered} Q(x) \longrightarrow \min, \\ x(a) = A, \qquad x(b) = B, \qquad x \in C^1[a,b]. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Функцию $x$, удовлетворяющую ограничениям задачи (1.1), назовем её *планом.* Множество планов обозначим через $\Omega$. Решение $x_*$ задачи (1.1) характеризуется тем, что $x_* \in \Omega$ и $Q(x) \geq Q(x_*)$ для всех $x \in \Omega$. Решение будем называть также *оптимальным планом.*

Введём *множество допустимых вариаций*

$$C_0^1[a,b] = \Big\{ h \in C^1[a,b] \Big|\ h(a) = h(b) = 0 \Big\}.$$

Очевидно, что из условий $x \in \Omega$, $h \in C_0^1[a,b]$ следует, что $x + \alpha h \in \Omega$ при всех вещественных $\alpha$.

Запишем разложение

$$Q(x+\alpha h) = \int\limits_a^b \{p(x'+\alpha h')^2 + q(x+\alpha h)^2 - 2f(x+\alpha h)\}dt =$$
$$= Q(x) + 2\alpha\int\limits_a^b \{px'h' + (qx-f)h\}dt + \alpha^2\int\limits_a^b \{p(h')^2 + qh^2\}dt.$$

Обозначим

$$l(x;h) = \int\limits_a^b \{px'h' + (qx-f)h\}dt,$$
$$D(h) = \int\limits_a^b \{p(h')^2 + qh^2\}dt.$$

Тогда

$$Q(x+\alpha h) = Q(x) + 2\alpha\, l(x;h) + \alpha^2 D(h). \tag{1.2}$$

**Лемма 1.1** *Если существует допустимая вариация* $h_0$, *для которой* $D(h_0) < 0$, *то*

$$\inf_{x\in\Omega} Q(x) = -\infty. \tag{1.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . Возьмем произвольный план $x_0$. Согласно (1.2) выражение $Q(x_0+\alpha h_0)$ представляет собой квадратичный трёхчлен относительно $\alpha$ с отрицательным старшим коэффициентом. Понятно, что $Q(x_0+\alpha h_0) \to -\infty$ при $\alpha\to\infty$, откуда и следует (1.3) ∎

Таким образом, задача (1.1) содержательна только при условии

$$D(h) \geq 0 \qquad \forall h \in C_0^1[a,b]. \tag{1.4}$$

В дальнейшем это условие будем считать выполненным.

**Теорема 1.1** *Для того чтобы план* $x_*$ *задачи* (1.1) *был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы*

$$l(x_*;h) = 0 \qquad \forall h \in C_0^1[a,b]. \tag{1.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . *Необходимость.* Возьмём допустимую вариацию $h$. Поскольку $x_*$ — точка минимума $Q(x)$ на $\Omega$, то

$$0 \le Q(x_* + \alpha h) - Q(x_*) = 2\alpha\, l(x_*; h) + \alpha^2 D(h).$$

Поделим это неравенство на $\alpha > 0$ и перейдём к пределу при $\alpha \to +0$. Получим $l(x_*; h) \ge 0$. Отметим, что вместе с $h$ допустимой вариацией является и $-h$. По доказанному $l(x_*; -h) \ge 0$, или $-l(x_*; h) \ge 0$. Объединяя два неравенства $l(x_*; h) \ge 0$ и $-l(x_*; h) \ge 0$, приходим к равенству (1.5).

*Достаточность.* Возьмём любой план $x$ и положим $h = x - x_*$. Очевидно, что $h \in C_0^1[a, b]$. Согласно (1.2), (1.5) и (1.4) имеем

$$Q(x) = Q(x_* + h) = Q(x_*) + D(h) \ge Q(x_*).$$

Теорема доказана.

Теперь в критерии оптимальности (1.5) нужно избавиться от $h$ (переформулировать его в терминах функций $p$, $q$ и $f$). Для этого потребуется некоторая подготовка.

**Лемма 1.2** *Пусть* $u \in C[a, b]$. *Если*

$$\int_a^b u(t)h'(t)\,dt = 0 \qquad \forall h \in C_0^1[a, b],$$

*то* $u(t) \equiv \mathrm{const}$ *на* $[a, b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Положим $c = (b-a)^{-1}\int_a^b u(t)\,dt$. Тогда $\int_a^b [u(t) - c]\,dt = 0$ и

$$\int_a^b \big[u(t) - c\big]^2 dt = \int_a^b \big[u(t) - c\big]\,u(t)\,dt.$$

Функция $h_0(t) = \int_a^t [u(\tau) - c]\,d\tau$ принадлежит $C_0^1[a, b]$. С её помощью последнее равенство можно переписать в виде

$$\int_a^b \big[u(t) - c\big]^2 dt = \int_a^b u(t)h_0'(t)\,dt.$$

По условию $\int_a^b u(t)h_0'(t)\,dt = 0$. Значит $\int_a^b [u(t)-c]^2 dt = 0$. Отсюда и следует, что $u(t) \equiv c$ на $[a,b]$ ■

**Основная лемма вариационного исчисления** *Пусть функции* $u, v$ *принадлежат* $C[a,b]$. *Если*

$$\int_a^b \big[u(t)h'(t) + v(t)h(t)\big]\,dt = 0 \qquad \forall h \in C_0^1[a,b], \tag{1.6}$$

*то* $u \in C^1[a,b]$ *и* $u'(t) \equiv v(t)$ *на* $[a,b]$.

Доказательство. Положим $g(t) = \int_a^t v(\tau)\,d\tau$. При $h \in C_0^1[a,b]$ имеем

$$\int_a^b v(t)h(t)\,dt = \int_a^b g'(t)h(t)\,dt = -\int_a^b g(t)h'(t)\,dt.$$

Условие (1.6) принимает вид

$$\int_a^b \big[u(t) - g(t)\big]h'(t)\,dt = 0 \qquad \forall h \in C_0^1[a,b].$$

По лемме 1.2 $u(t)-g(t) \equiv \mathrm{const}$ на $[a,b]$. Отсюда следует и непрерывная дифференцируемость функции $u(t)$ и тождество $u'(t) \equiv v(t)$ на $[a,b]$ ■

Вернёмся к критерию оптимальности (1.5) и перепишем его в развёрнутом виде:

$$\int_a^b \big\{px_*'h' + (qx_* - f)h\big\}dt = 0 \qquad \forall h \in C_0^1[a,b]. \tag{1.7}$$

**Теорема 1.2** *Для того чтобы план* $x_*$ *задачи* (1.1) *был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы* $px_*' \in C^1[a,b]$ *и*

$$-(px_*')' + qx_* = f \quad \text{на} \quad [a,b]. \tag{1.8}$$

Доказательство. *Необходимость.* Поскольку $x_*$ — оптимальный план, то выполняется условие (1.7). Остаётся сослаться на основную лемму вариационного исчисления с $u = px_*'$ и $v = qx_* - f$.

*Достаточность.* Покажем, что выполняется условие (1.7). При $h \in C_0^1[a,b]$ имеем

$$\int_a^b (px_*')h'\,dt = -\int_a^b (px_*')'h\,dt.$$

Учитывая это, получаем

$$l(x_*;h) = \int_a^b \left[-(px_*')' + qx_* - f\,\right]h\,dt.$$

В силу (1.8) последний интеграл равен нулю. Теорема доказана.

Установлено, что решение задачи (1.1) сводится к решению краевой задачи

$$\begin{gathered} \mathcal{L}(x;t) := -\frac{d}{dt}\Big(p\frac{dx}{dt}\Big) + qx = f, \\ x(a) = A, \qquad x(b) = B. \end{gathered} \tag{1.9}$$

Дифференциальный оператор $\mathcal{L}(x;t)$ называется *оператором Штурма—Лиувилля.*

Напомним, что теорема 1.2 справедлива при выполнении условия (1.4), которое в развёрнутом виде выглядит так:

$$\int_a^b \big\{p(h')^2 + qh^2\big\}dt \geq 0 \qquad \forall h \in C_0^1[a,b]. \tag{1.10}$$

Избавиться в этом условии от $h$ (переформулировать его в терминах $p$ и $q$) — непростая задача, решению которой посвящён следующий раздел. Пока же отметим, что неравенство (1.10) очевидно выполняется, если функции $p(t)$ и $q(t)$ неотрицательны на $[a,b]$.

Менее тривиальным является следующее утверждение.

**Теорема 1.3** *Если $D(h) \geq 0$ на $C_0^1[a,b]$, то необходимо*

$$p(t) \geq 0 \quad \text{на} \quad [a,b]. \tag{1.11}$$

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдётся точка $t_0 \in (a,b)$, в которой $p(t_0) < 0$. Положим $\varepsilon_0 = -p(t_0)/2$ и выберем $\delta_0 > 0$ так, чтобы $[t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0] \subset (a, b)$ и $|p(t) - p(t_0)| \le \varepsilon_0$ при $t \in [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]$. В этом случае $p(t) \le p(t_0) + \varepsilon_0 = -\varepsilon_0$, т. е.

$$p(t) \le -\varepsilon_0 \quad \text{на} \quad [t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0]. \tag{1.12}$$

При $\delta \in (0, \delta_0]$ введём вариацию

$$h_\delta(t) = \begin{cases} \sqrt{\delta/\pi}\,\left[1 + \cos\left((\pi/\delta)(t - t_0)\right)\right], & \text{если } t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \\ 0 & \text{при остальных } t \in [a, b]. \end{cases}$$

Поскольку $h'_\delta(t) = -\sqrt{\pi/\delta}\,\sin\left((\pi/\delta)(t - t_0)\right)$ при $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, то $h_\delta \in C_0^1[a, b]$. Кроме того,

$$0 \le h_\delta(t) \le 2\sqrt{\delta/\pi} \quad \text{на} \quad [a, b]. \tag{1.13}$$

Согласно (1.12) и (1.13) имеем

$$D(h_\delta) = \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \left\{p(h'_\delta)^2 + qh_\delta^2\right\}dt \le -\varepsilon_0 \frac{\pi}{\delta} \int\limits_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \sin^2\left((\pi/\delta)(t - t_0)\right) dt +$$
$$+ \frac{4\delta}{\pi} \int\limits_a^b |q(t)|\, dt = -\varepsilon_0 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2(\tau)\, d\tau + \frac{4\delta}{\pi} \int\limits_a^b |q(t)|\, dt.$$

Очевидно, что $D(h_\delta) < 0$ при малых $\delta > 0$. Но это противоречит предположению о неотрицательности $D(h)$ на $C_0^1[a, b]$. Теорема доказана.

Условие (1.11) называется *условием Лежандра.* Оно необходимо для неотрицательности $D(h)$ на $C_0^1[a, b]$, но не достаточно. Более того, даже *усиленное условие Лежандра* $p(t) > 0$ на $[a, b]$ не гарантирует неотрицательности $D(h)$ на $C_0^1[a, b]$.

**Пример** Возьмем

$$D_\lambda(h) = \int\limits_0^\pi \left\{(h')^2 - \lambda h^2\right\}dt, \qquad h \in C_0^1[0, \pi].$$

Здесь $p(t) \equiv 1$ — усиленное условие Лежандра выполнено. Вместе с тем, на $h_0(t) = \sin(t)$ из $C_0^1[0, \pi]$ имеем

$$D_\lambda(h_0) = \int\limits_0^\pi \left\{\cos^2(t) - \lambda \sin^2(t)\right\}dt = \frac{\pi}{2}(1 - \lambda),$$

так что при $\lambda > 1$ интегральная квадратичная форма $D_\lambda(h)$ не является неотрицательной на $C_0^1[0, \pi]$.

## 2. Критерий неотрицательности интегральной квадратичной формы

Рассмотрим интегральную квадратичную форму

$$D(h) = \int_a^b \{p(h')^2 + qh^2\}dt, \qquad h \in C_0^1[a,b],$$

при следующих предположениях

$$q \in C[a,b], \qquad p \in C^1[a,b], \qquad p(t) > 0 \quad \text{на} \quad [a,b]. \tag{2.1}$$

Обычно функции $p$ и $q$ определены на более широком интервале $(a_0, b_0)$, содержащем $[a,b]$, и условия (2.1) выполняются на $(a_0, b_0)$. Именно это мы в дальнейшем и будем предполагать. Нас интересует критерий неотрицательности $D(h)$ на $C_0^1[a,b]$.

Рассмотрим на $(a_0, b_0)$ дифференциальное уравнение

$$(ph')' = qh. \tag{2.2}$$

Учитывая (2.1), перепишем его в виде $ph'' + p'h' - qh = 0$, или, что равносильно,

$$h'' + \frac{p'}{p}h' - \frac{q}{p}h = 0. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) называется *уравнением Якоби.* Это однородное дифференциальное уравнение второго порядка, разрешённое относительно старшей производной, с непрерывными на $(a_0, b_0)$ коэффициентами. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что такое уравнение имеет единственное на $(a_0, b_0)$ решение при любых начальных условиях вида $h(c) = A$, $h'(c) = A'$, где $c \in (a_0, b_0)$. Назовём *главным решением уравнения Якоби* то решение $h_0(t)$, у которого

$$h_0(a) = 0, \qquad h_0'(a) = 1. \tag{2.4}$$

**Теорема Якоби** *Пусть выполнены условия* (2.1). *Для того чтобы квадратичная форма* $D(h)$ *была неотрицательной на* $C_0^1[a,b]$, *необходимо и достаточно, чтобы главное решение уравнения Якоби* $h_0(t)$ *было положительным на* $(a,b)$.

Доказательство. *Достаточность.* Допустим, что $h_0(t)>0$ на $(a,b)$. Покажем, что

$$D(h)=\int\limits_a^b p\Big(h'-\frac{h}{h_0}h_0'\Big)^2dt \qquad \forall h\in C_0^1[a,b]. \tag{2.5}$$

Отметим прежде всего, что функция $h/h_0$ непрерывна на $[a,b]$. Действительно, по правилу Лопиталя для $h\in C_0^1[a,b]$ имеем

$$\lim_{t\to a+0}\frac{h(t)}{h_0(t)}=\lim_{t\to a+0}\frac{h'(t)}{h_0'(t)}=h'(a).$$

Далее, предел дроби $h(t)/h_0(t)$ при $t\to b-0$ равен нулю, если $h_0(b)>0$. Если же $h_0(b)=0$, то $h_0'(b)\neq 0$ [иначе $h_0(t)\equiv 0$ в силу единственности решения уравнения Якоби с начальными условиями $h_0(b)=0$, $h_0'(b)=0$, что противоречит (2.4)]. В этом случае

$$\lim_{t\to b-0}\frac{h(t)}{h_0(t)}=\lim_{t\to b-0}\frac{h'(t)}{h_0'(t)}=\frac{h'(b)}{h_0'(b)}.$$

Установлено, что $h/h_0\in C[a,b]$. Значит, под интегралом в правой части (2.5) стоит непрерывная функция.

Проверим справедливость равенства (2.5). При малых $\varepsilon>0$ имеем

$$\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} p\Big(h'-\frac{h}{h_0}h_0'\Big)^2dt=\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}p(h')^2dt-2\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}\frac{ph_0'}{h_0}hh'\,dt+\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}p\Big(\frac{h_0'}{h_0}\Big)^2h^2dt. \tag{2.6}$$

Но

$$-2\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}\frac{ph_0'}{h_0}hh'\,dt=-\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}\frac{ph_0'}{h_0}dh^2=-\frac{ph_0'}{h_0}h^2\Big|_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}+\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}\Big(\frac{ph_0'}{h_0}\Big)'h^2dt=$$

$$=-p\frac{h}{h_0}h_0'h\Big|_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}+\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}\frac{(ph_0')'}{h_0}h^2dt-\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}p\Big(\frac{h_0'}{h_0}\Big)^2h^2dt.$$

Поскольку $h_0$ удовлетворяет уравнению (2.2), то

$$\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}\frac{(ph_0')'}{h_0}h^2dt=\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}qh^2dt.$$

Значит,

$$-2\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}\frac{ph_0'}{h_0}hh'\,dt=\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}qh^2dt-\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}p\Big(\frac{h_0'}{h_0}\Big)^2h^2dt-p\frac{h}{h_0}h_0'h\Big|_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}.$$

Подставляя это в (2.6), получаем

$$\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}p\Big(h'-\frac{h}{h_0}h_0'\Big)^2dt=\int\limits_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}\big\{p(h')^2+qh^2\big\}dt-p\frac{h}{h_0}h_0'h\Big|_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}.$$

В данном равенстве перейдём к пределу при $\varepsilon\to+0$. Функция $p(h/h_0)h_0'$ непрерывна на $[a,b]$ и $h\in C_0^1[a,b]$, так что двойная подстановка стремится к нулю при $\varepsilon\to+0$. Теперь ясно, что предельный переход приводит к формуле (2.5), из которой, в частности, следует, что $D(h)\geq 0$ при всех $h\in C_0^1[a,b]$. Достаточность установлена.

Для доказательства необходимости потребуется некоторая подготовка.

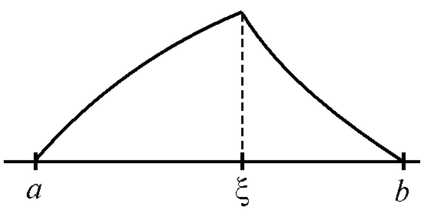
**Лемма о скруглении углов** *Пусть* $D(h)\geq 0$ *на* $C_0^1[a,b]$. *Если функция* $\hat h$ *удовлетворяет условиям*

$$\hat h\in C[a,b],\qquad \hat h(a)=\hat h(b)=0;$$

$$\hat h\in C^1[a,\xi],\qquad \hat h\in C^1[\xi,b]\quad\textit{при некотором}\quad \xi\in(a,b),$$

*то* $D(\hat h)\geq 0$.

Характерный вид функции $\hat h$ изображён на рисунке.




Доказательство. Введём вспомогательную функцию

$$g(t)=\begin{cases}\Big(\dfrac{1-|t|}{2}\Big)^2 & \text{при } t\in[-1,1],\\ 0 & \text{при остальных } t\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

На интервале $(0,1)$ имеем

$$g'(t)=\frac{d}{dt}\Big(\frac{1-t}{2}\Big)^2=-\frac{1}{2}(1-t).$$

Учитывая чётность $g$, запишем

$$g'(+0)=-\frac{1}{2}\,,\qquad g'(-0)=\frac{1}{2}\,,\qquad |g'(t)|\le\frac{1}{2}\quad\text{при}\quad t\ne 0. \tag{2.7}$$

К этому нужно добавить, что $0\le g(t)\le 1/4$ на $\mathbb{R}$.

Положим при $\delta>0$

$$g_\delta(t)=\delta\,g\Big(\frac{t}{\delta}\Big).$$

Очевидно, что $g_\delta(t)=0$ вне $[-\delta,\delta]$. Кроме того,

$$0\le g_\delta(t)\le\delta/4\quad\text{на}\quad\mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Поскольку $g'_\delta(t)=g'(t/\delta)$, то согласно (2.7) при всех $\delta>0$

$$g'_\delta(+0)=-\frac{1}{2}\,,\qquad g'_\delta(-0)=\frac{1}{2}\,,\qquad |g'_\delta(t)|\le\frac{1}{2}\quad\text{при}\quad t\ne 0. \tag{2.9}$$

Введём обозначение $\alpha_1=\hat h'(\xi{+}0)-\hat h'(\xi{-}0)$ и при малых $\delta>0$ рассмотрим функцию

$$h_\delta(t)=\hat h(t)+\alpha_1 g_\delta(t-\xi).$$

Покажем, что $h_\delta\in C_0^1[a,b]$. Сомнение вызывает только дифференцируемость $h_\delta(t)$ при $t=\xi$. Имеем согласно (2.9)

$$h'_\delta(\xi{+}0)=\hat h'(\xi{+}0)-\frac{1}{2}\alpha_1,\qquad h'_\delta(\xi{-}0)=\hat h'(\xi{-}0)+\frac{1}{2}\alpha_1.$$

Учитывая определение $\alpha_1$, получаем $h'_\delta(\xi{+}0)-h'_\delta(\xi{-}0)=0$, т.е. $h'_\delta(\xi{+}0)=h'_\delta(\xi{-}0)$. Установлено, что $h_\delta\in C_0^1[a,b]$ при малых $\delta>0$.

Согласно условию леммы $D(h_\delta)\ge 0$. Распишем это неравенство подробно:

$$0 \le D\big(\hat h+\alpha_1 g_\delta(\cdot-\xi)\big) = \int\limits_a^b \big\{p\big(\hat h'+\alpha_1 g'_\delta(\cdot-\xi)\big)^2+q\big(\hat h+\alpha_1 g_\delta(\cdot-\xi)\big)^2\big\}dt =$$

$$= D\big(\hat h\big) + \alpha_1 \int\limits_a^b q\big[2\hat h g_\delta(\cdot-\xi) + \alpha_1 g_\delta^2(\cdot-\xi)\big]dt +$$

$$+ \alpha_1 \int\limits_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} p\big[2\hat h' g'_\delta(\cdot-\xi) + \alpha_1\big(g'_\delta(\cdot-\xi)\big)^2\big]dt =: D\big(\hat h\big) + \alpha_1 I_\delta^{(0)} + \alpha_1 I_\delta^{(1)}. \tag{2.10}$$

Оценим интегралы $I_\delta^{(0)}$ и $I_\delta^{(1)}$. На основании (2.8) и (2.9) имеем

$$\big|I_\delta^{(0)}\big| \le \frac{\delta}{2}\int\limits_a^b |q|\big(|\hat h| + |\alpha_1|\delta/8\big)\,dt,$$

$$\big|I_\delta^{(1)}\big| \le \Bigg(\int\limits_{\xi-\delta}^{\xi} + \int\limits_{\xi}^{\xi+\delta}\Bigg) p\big(|\hat h'| + |\alpha_1|/4\big)\,dt.$$

Очевидно, что $I_\delta^{(0)} \to 0$ и $I_\delta^{(1)} \to 0$ при $\delta \to +0$. Переходя в (2.10) к пределу при $\delta \to +0$, получаем $D(\hat h) \ge 0$. Лемма доказана.

*Доказательство необходимости в теореме Якоби.* Пусть $D(h) \ge 0$ на $C_0^1[a,b]$. Покажем, что главное решение уравнения Якоби $h_0(t)$ положительно на $(a,b)$.

Допустим, вопреки утверждению, что существует точка $\xi \in (a,b)$, в которой $h_0(\xi) = 0$. Тогда

$$\int\limits_a^\xi \big\{p(h_0')^2 + q h_0^2\big\}dt = 0. \tag{2.11}$$

Действительно, согласно (2.2)

$$\int\limits_a^\xi p(h_0')^2 dt = \int\limits_a^\xi (ph_0')dh_0 = -\int\limits_a^\xi (ph_0')' h_0\,dt = -\int\limits_a^\xi q h_0^2\,dt,$$

откуда и следует (2.11). Отметим, что $h_0'(\xi) \ne 0$.

Введём функцию

$$\hat{h}_0(t) = \begin{cases} h_0(t) & \text{при } t \in [a, \xi], \\ 0 & \text{при } t \in [\xi, b]. \end{cases}$$

В силу (2.11)

$$D(\hat{h}_0) = \int\limits_a^\xi \{p(h_0')^2 + qh_0^2\} dt = 0. \tag{2.12}$$

Возьмём $h \in C_0^1[a,b]$ и запишем разложение

$$D(\hat{h}_0 + \alpha h) = D(\hat{h}_0) + \alpha^2 D(h) + 2\alpha \int\limits_a^\xi \left[ph_0'h' + qh_0h\,\right] dt.$$

Имеем

$$\int\limits_a^\xi ph_0'h'\,dt = \int\limits_a^\xi (ph_0')\,dh = ph_0'h\Big|_a^\xi - \int\limits_a^\xi qh_0h\,dt.$$

Учитывая (2.12), получаем

$$D(\hat{h}_0 + \alpha h) = \alpha^2 D(h) + 2\alpha\, p(\xi)h_0'(\xi)h(\xi).$$

Выберем допустимую вариацию $h$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\lambda := 2p(\xi)h_0'(\xi)h(\xi) < 0.$$

Тогда

$$D(\hat{h}_0 + \alpha h) = \alpha\big[\lambda + \alpha D(h)\big]. \tag{2.13}$$

При малых $\alpha > 0$ правая часть (2.13) отрицательна. Вместе с тем, $D(\hat{h}_0 + \alpha h) \geq 0$, поскольку функция $\hat{h}_0 + \alpha h$ удовлетворяет условиям леммы о скруглении углов. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы Якоби.

## 3. Критерий положительности интегральной квадратичной формы

Квадратичная форма $D(h)$ называется *положительной* если $D(h) > 0$ на всех допустимых вариациях $h \in C_0^1[a,b]$, не равных тождественно нулю на $[a,b]$.

**Теорема 3.1** *Пусть выполнены условия* (2.1). *Для того чтобы квадратичная форма $D(h)$ была положительной необходимо и достаточно, чтобы главное решение уравнения Якоби $h_0(t)$ было положительным на $(a,b]$.*

Доказательство. *Необходимость.* Очевидно, что положительная квадратичная форма $D(h)$ является и неотрицательной. По теореме Якоби $h_0(t) > 0$ на $(a,b)$. Остается проверить, что $h_0(b) > 0$. Допустим противное: $h_0(b) = 0$. Тогда $h_0 \in C_0^1[a,b]$. Более того, $D(h_0) = 0$. Это доказывается так же, как (2.11) (при $\xi = b$). Получили противоречие с положительностью квадратичной формы $D(h)$, поскольку главное решение уравнения Якоби $h_0(t)$ не равно тождественно нулю на $[a,b]$.

Доказательству достаточности предпошлём одно вспомогательное утверждение, относящееся к неотрицательным квадратичным формам.

**Лемма 3.1** *Допустим, что $D(h) \geq 0$ на $C_0^1[a,b]$. Если вариация $h_*$ такова, что $D(h_*) = 0$, то $h_*(t) = \lambda h_0(t)$ на $[a,b]$ при некотором вещественном $\lambda$.*

Доказательство. По теореме Якоби $h_0(t) > 0$ на $(a,b)$. Учитывая (2.5), запишем

$$D(h_*) = \int_a^b p\Big(h'_* - \frac{h_*}{h_0}h'_0\Big)^2 dt.$$

По условию леммы $D(h_*) = 0$. Отсюда следует в силу положительности $p(t)$, что

$$h'_* - \frac{h_*}{h_0}h'_0 = 0 \quad \text{на} \quad (a,b).$$

Перепишем данное тождество в эквивалентном виде:

$$\frac{h'_*h_0 - h_*h'_0}{h_0^2} = 0 \quad \text{на} \quad (a,b).$$

Это означает, что $(h_*/h_0)' = 0$ на $(a,b)$. Теперь очевидно, что $h_*/h_0 \equiv \text{const} =: \lambda$, или $h_*(t) = \lambda h_0(t)$ на $(a,b)$. По непрерывности последнее тождество выполняется на всём отрезке $[a,b]$ ■

*Достаточность.* Поскольку $h_0(t) > 0$ на $(a,b)$, то по теореме Якоби $D(h) \geq 0$ на $C_0^1[a,b]$. Допустим, что $D(h_*) = 0$ на некоторой вариации $h_* \in C_0^1[a,b]$, не равной тождественно нулю на $[a,b]$. По лемме 3.1, $h_*(t) = \lambda h_0(t)$ на $[a,b]$, причём $\lambda \neq 0$. Но $h_*(b) = 0$. Значит, и $h_0(b) = 0$, что противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Выясним, какую роль играет положительность $D(h)$ применительно к задаче (1.1).

**Теорема 3.2** *Предположим, что решение задачи* (1.1) *существует. Если квадратичная форма* $D(h)$, *соответствующая квадратичному функционалу* $Q(x)$, *положительна, то решение задачи* (1.1) *единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о . Допустим, что задача (1.1) имеет два различных решения $x_*$ и $x_1$. Обозначим $h_1 = x_1 - x_*$. Очевидно, что $h_1 \in C_0^1[a,b]$ и $h_1 \not\equiv 0$ на $[a,b]$. На основании (1.2) и (1.5) имеем

$$Q(x_1) = Q(x_* + h_1) = Q(x_*) + D(h_1).$$

Так как $Q(x_1) = Q(x_*)$, то $D(h_1) = 0$. Это противоречит положительности $D(h)$. Теорема доказана.

Естественным дополнением к теореме 3.2 является следующее утверждение.

**Теорема 3.3** *Пусть главное решение уравнения Якоби* $h_0(t)$ *положительно на* $(a,b)$ *и* $h_0(b) = 0$. *Если* $x_*$ *— решение задачи* (1.1), *то всё множество решений этой задачи допускает представление*

$$x(t) = x_*(t) + \lambda h_0(t), \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . В данном случае $h_0 \in C_0^1[a,b]$ и $D(h_0) = 0$. Для любого плана $x$ вида (3.1) согласно (1.2) и (1.3) имеем

$$Q(x) = Q(x_* + \lambda h_0) = Q(x_*) + \lambda^2 D(h_0) = Q(x_*),$$

так что $x$ — решение задачи (1.1).

Наоборот, возьмём произвольное решение $x$ задачи (1.1) и положим $h_* = x - x_*$. Очевидно, что $h_*$ — допустимая вариация. Как обычно, запишем

$$Q(x) = Q(x_* + h_*) = Q(x_*) + D(h_*).$$

Так как $Q(x) = Q(x_*)$, то $D(h_*) = 0$. По лемме 3.1, $h_* = \lambda h_0$ на $[a,b]$. Учитывая определение $h_*$, приходим к представлению (3.1). Теорема доказана.

## 4. Схема решения квадратичной вариационной задачи

Вернёмся к квадратичной вариационной задаче

$$\begin{gathered} Q(x) := \int\limits_a^b \{p(x')^2 + qx^2 - 2fx\}dt \longrightarrow \min, \\ x(a) = A, \qquad x(b) = B, \qquad x \in C^1[a,b]. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Проведённый в предыдущих разделах анализ позволяет предложить следующую схему её решения.

1. Проверяем выполнение условий

$$q, f \in C[a,b], \qquad p \in C^1[a,b], \qquad p(t) > 0 \quad \text{на} \quad [a,b].$$

2. Если они выполнены, находим главное решение уравнения Якоби

$$\begin{gathered} -(ph')' + qh = 0, \\ h(a) = 0, \qquad h'(a) = 1. \end{gathered}$$

Обозначим его $h_0(t)$.

3. Если $h_0(\xi) = 0$ при некотором $\xi \in (a,b)$, то

$$\inf_{x\in\Omega} Q(x) = -\infty.$$

Задача (4.1) не имеет решения. Иначе переходим к очередному пункту.

4. Решаем краевую задачу Штурма—Лиувилля

$$\begin{gathered} -(px')' + qx = f, \\ x(a) = A, \qquad x(b) = B. \end{gathered}$$

Пусть $x_*$ — решение этой задачи. [Отметим, что существование решения не гарантируется, равно как не исключается наличие бесконечного множества решений — см. примеры ниже.]

5. Если $h_0(b) > 0$, то $x_*$ — единственное решение задачи (4.1). Если $h_0(b) = 0$, то всё множество решений задачи (4.1) допускает представление

$$x(t) = x_*(t) + \lambda h_0(t), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Пример 1** Рассмотрим квадратичную вариационную задачу

$$\begin{gathered} Q(x) := \int\limits_0^{\pi/2} \{(x')^2 - x^2\} dt \longrightarrow \min, \\ x(0) = 0, \qquad x(\pi/2) = 1, \qquad x \in C^1[0, \pi/2]. \end{gathered} \tag{4.2}$$

В данном случае $p(t) \equiv 1$, $q(t) \equiv -1$, $f(t) \equiv 0$. Все необходимые условия выполнены. Найдём главное решение уравнения Якоби

$$-h'' - h = 0, \qquad h(0) = 0, \qquad h'(0) = 1.$$

Общее решение уравнения Якоби имеет вид

$$h(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t).$$

Выделим главное решение: $h(0) = 0 \implies c_1 = 0$; $h'(0) = 1 \implies c_2 = 1$. Таким образом, $h_0(t) = \sin(t)$. Имеем $h_0(t) > 0$ на $[0, \pi/2]$.

Решим краевую задачу Штурма—Лиувилля

$$-x'' - x = 0, \qquad x(0) = 0, \qquad x(\pi/2) = 1.$$

Из общего решения $x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$ выделим то, которое удовлетворяет краевым условиям: $x(0) = 0 \implies c_1 = 0$; $x(\pi/2) = 1 \implies c_2 = 1$. Получаем $x_*(t) = \sin(t)$. Поскольку $h_0(\pi/2) > 0$, то $x_*$ — единственное решение задачи (4.2).

**Пример 2** В задаче (4.2) заменим $\pi/2$ на $\pi$. Придём к такой задаче:

$$\begin{gathered} Q(x) := \int\limits_0^{\pi} \{(x')^2 - x^2\} dt \longrightarrow \min, \\ x(0) = 0, \qquad x(\pi) = 1, \qquad x \in C^1[0, \pi]. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Главное решение уравнения Якоби не изменится $h_0(t) = \sin(t)$, причём $h_0(t)$ остаётся положительным на $(0, \pi)$.

Обратимся к краевой задаче Штурма—Лиувилля:

$$-x'' - x = 0, \qquad x(0) = 0, \qquad x(\pi) = 1. \tag{4.4}$$

Из общего решения $x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$ выделим то, которое удовлетворяет первому краевому условию: $x(0) = 0 \implies c_1 = 0$. Второе краевое условие $x(\pi) = 1$ принимает вид $c_2 \sin(\pi) = 1$. Оно не выполняется ни при каком $c_2$. Значит, задача (4.4) не имеет решения.

Покажем, что в данном случае $\inf_{x\in\Omega} Q(x) = -\infty$. Возьмём последовательность планов

$$x_n(t) = \frac{1}{\pi}\big(t + n\sin(t)\big), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Имеем

$$Q(x_n) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi \Big\{\big(1 + n\cos(t)\big)^2 - \big(t + n\sin(t)\big)^2\Big\}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi (1 - t^2)\,dt + \frac{2n}{\pi^2}\int_0^\pi \big[\cos(t) - t\sin(t)\big]dt.$$

Поскольку

$$-\int_0^\pi t\sin(t)\,dt = t\cos(t)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos(t)\,dt,$$

то

$$Q(x_n) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi (1 - t^2)\,dt - \frac{2n}{\pi}.$$

Очевидно, что $Q(x_n) \to -\infty$ при $n \to \infty$.

**Пример 3** В задаче (4.3) заменим второе краевое условие $x(\pi) = 1$ на $x(\pi) = 0$. У новой задачи

$$\begin{gathered} Q(x) := \int_0^\pi \big\{(x')^2 - x^2\big\}dt \longrightarrow \min, \\ x(0) = 0, \qquad x(\pi) = 0, \qquad x \in C^1[0, \pi], \end{gathered} \tag{4.5}$$

главное решение уравнения Якоби останется тем же $h_0(t) = \sin(t)$. Сохраняется и его положительность на $(0, \pi)$. Что касается краевой задачи Штурма—Лиувилля

$$-x'' - x = 0, \qquad x(0) = 0, \qquad x(\pi) = 0,$$

то теперь она будет иметь бесконечное множество решений $x(t) = c_2 \sin(t)$. Возьмём решение $x_*(t) \equiv 0$, соответствующее коэффициенту $c_2 = 0$. Учитывая равенство $h_0(\pi) = 0$, приходим к выводу о том, что всё множество решений задачи (4.5) допускает представление

$$x(t) = \lambda \sin(t), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

В заключение отметим, что использованный в данной статье элементарный подход позволяет решать и более сложные вариационные задачи [1]. Дальнейшие сведения о вариационном исчислении можно найти, например, в [2–5].

## Литература


1. *Кирушев В. А., Малозёмов В. Н., Певный А. Б.* Хвост дракона // Журн. вычисл. мат. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 11. С. 1362–1369.
2. *Буслаев В. С.* Вариационное исчисление. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. 287 с.
3. *Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 429 с.
4. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. IV. Часть I. Изд. 6-е. М.: Наука, 1974. 336 с.
5. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. М.: Физматгиз, 1968. 575 с.