Кафедра Информатики и Математического Обеспечения
Петрозаводский Государственный Университет

Кулаков Кирилл Александрович

Генерация систем неотрицательных линейных диофантовых уравнений

Система одАНЛДУ

Ассоциированная с КС-грамматикой однородная система неотрицательных линейных диофантовых уравнений

$$\mathrm{E}^m(I_0, I_1, \ldots, I_n)x = Ax, \quad \mathrm{E}^m(I_0, I_1, \ldots, I_n) \in \{0,1\}^{n\times m}, \quad A \in \mathbb{Z}_+^{n\times m}.$$

Разбиение конечного отрезка натурального ряда $I^n = \{I_0, I_1, \ldots, I_n\}$, $I_k \subseteq \{1, 2, \cdots\}$.

Матрица разбиения $\mathrm{E}^m(I^n) = \mathrm{E}^m(I_0, I_1, \ldots, I_n) \in \{0,1\}^{n\times m}$, т.ч.

$$\mathrm{E}^m_{k,i}(I^n) = 1 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} i \in I_k\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,,\ i = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Базис Гильберта — множество неразложимых решений $\mathcal{H} = \{h^{(1)}, \ldots h^{(q)}\}$.

Задача генерации

Построение системы одАНЛДУ и ее базиса Гильберта по заданным параметрам.

Вход: параметры генерации — число уравнений m и неизвестных m, максимальный размер коэффициентов, максимальный размер базиса Гильберта и др.

Выход: $\mathrm{E}^m(I_0, I_1, \ldots, I_n), A, \mathcal{H}$.

Алгоритмы генерации используются в web-системе Web-SynDic, предназначенной для удаленной демонстрации и тестирования алгоритмов решения систем одАНЛДУ.

`http://websyndic.cs.karelia.ru`

Преобразование произвольной системы одАНЛДУ

Теорема 1 *Пусть задана произвольная система одАНЛДУ из n уравнений с m неизвестными:*

$$\mathrm{E}^m(I_1,\dots,I_n)x = Ax. \tag{1}$$

Задача нахождения базиса Гильберта системы (1) сводится к задаче нахождения базиса Гильберта либо уравнения вида

$$\sum_{i\in I_k^*} x_i = \sum_{i\in J} a_{ki}x_i, \tag{2}$$

для некоторого $k \in \mathbb{N}_n$*, где* $I_k^* \subseteq I_k$ *и* $J \subseteq \mathbb{N}_m$*; либо системы одАНЛДУ вида*

$$\sum_{i\in I_{k_l}^*} x_i = \sum_{j\in J_{k_l}} x_j, \ = \overline{1,p} \tag{3}$$

для некоторого $p \in \mathbb{N}_n$*, где* $I_{k_l}^* \subseteq I_{k_l}$ *и* $\bigcup_{l=1}^{p} J_{k_l} = \bigcup_{j=1}^{p} I_{k_l}^* \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} I_k = \mathbb{N}_m$*.*

Алгоритмы генерации систем одАНЛДУ

Алгоритм jordan. Системы одАНЛДУ вида (3) с единичными матрицами коэффициентов и дополнение неизвестными, значения которых равны нулю. Общий вид системы $(\mathbb{I}|B)\,x = (\mathbb{I}|B+\Delta)$. Опубликован в 2005 г.

Алгоритм gauss. Уравнения одАНЛДУ вида (2). На каждом шаге обратного преобразования добавляется одно неизвестное. Общий вид системы $(\mathbb{I}|B)\,x = (\mathbb{O}|A_+|B+\Delta)$. Опубликован в 2005 г.

Алгоритм extgauss. Уравнения одАНЛДУ вида (2). На каждом шаге обратного преобразования добавляется одно или несколько неизвестных.

Алгоритм symsystem. Системы одАНЛДУ вида (3) в общем случае.

Алгоритм comsystem. Уравнения одАНЛДУ вида (2) или системы одАНЛДУ вида (3). В случае построения (3) система дополняется неизвестными, значения которых равны нулю. На каждом шаге обратного преобразования добавляется одно или несколько неизвестных.

Алгоритм extgauss

Идея алгоритма заключается в построении уравнения (2) в общем виде, что можно записать следующим образом

$$\sum_{i=k_{n-1}}^{k_n-1} x_i = \sum_{i=k_n}^{m} a_{ni}x_i, n \le k_{n-1} \le k_n - 1 < m, a_{ni} > 0$$

и выполнении обратного преобразования.

Общий вид генерируемой системы одАНЛДУ:

$$\left(\mathbb{I}' \,\middle|\, B \right) x = \left(\mathbb{O} \,\middle|\, A_+ \,\middle|\, B + \Delta \right) x$$

Формальное описание:

Вход: n — число уравнений, m — число неизвестных, $n < m$.

Выход: $(\mathrm{E}^m, A, \mathcal{H})$.

1. генерируем случайным образом число $p \in \{0, \dots, m-n-1\}$ и последовательность $0 < k_1 < \dots < k_n = n + p + 1$;

2. генерируем случайным образом матрицу $B \in \{0,1\}^{n\times(m-n-p)}$, которая удовлетворяет условию $\forall k \ \ \sum\limits_{i=1}^{n} B_{ik} = 1$;

3. генерируем случайным образом матрицу $\Delta \in \mathbb{Z}_+^{n\times(m-n-p)}$, которая удовлетворяет условию $\forall j \ \ \Delta_{nj} > 0$;

4. генерируем случайным образом матрицу A_+, которая удовлетворяет условию $A_+ = \begin{pmatrix} a_{1k_1} & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & a_{1(n+p)} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2k_2} \ \dots & a_{2(n+p)} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & 0 \end{pmatrix}$, $a_{ij} \geqslant 0$, $a_{it} > 0$, $k_i \leqslant t < k_{i+1}$;

5. Строим матрицу $\mathbb{I}'$, т.ч. $\mathbb{I}' = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots\dots\dots\dots & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & & & & 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

6. $\mathrm{E}^m(I^n) = \left(\mathbb{I}' \,\middle|\, B \right)$, $A = \left(\mathbb{O} \,\middle|\, A_+ \,\middle|\, B + \Delta \right)$;

7. С помощью преобразования строим базис $\mathcal{H}$.

Алгоритм symsystem

Идея алгоритма заключается в генерации систем одАНЛДУ вида (3). Матрица коэффициентов $E - A$ соответствует матрице инцидентности некоторого орграфа сети. При этом базисным решениям соответствуют контуры графа.

Общий вид генерируемой системы одАНЛДУ:

$$\mathrm{E}^m(I_1, \ldots, I_n)x = \mathrm{E}^m(J_1, \ldots, J_n)x$$

Формальное описание:

Вход: n — число уравнений, m — число неизвестных, $0 < n < m$.

Выход: $(\mathrm{E}^m(I^n), \mathrm{E}^m(J^n), \mathcal{H})$.

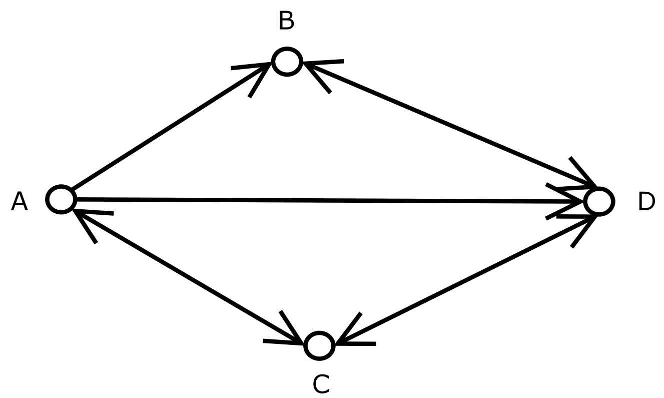
1. Генерируем случайным образом матрицы $\mathrm{E}^m(I^n)$ и $\mathrm{E}^m(I^n)$;

2. Вычисляем базис Гильберта $\mathcal{H}$.

Пример системы одАНЛДУ

$$\begin{aligned}
&x_{AB} + x_{AC} + x_{AD} = x_{CA} \\
&x_{BA} + x_{BD} = x_{AB} + x_{DB} \\
&x_{CA} + x_{CD} = x_{AC} + x_{DC} \\
&x_{DA} + x_{DB} + x_{DC} = x_{AD} + x_{BD} + x_{CD}
\end{aligned}$$

Соответствующий ей орграф



Множество контуров орграфа

$$ABDCA, \quad ADCA$$

Базис Гильберта

$$\begin{aligned}
&\forall i \;\; x_i = 0, \quad x_{AB} = 1,\; x_{BD} = 1,\; x_{DC} = 1,\; x_{CA} = 1 \\
&\forall i \;\; x_i = 0, \quad x_{AD} = 1,\; x_{DC} = 1,\; x_{CA} = 1
\end{aligned}$$

Алгоритм comsystem

Идея алгоритма заключается в построении уравнения (2) или системы (3) и выполнении обратного преобразования.

Общий вид генерируемой системы одАНЛДУ:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} E' & \multicolumn{2}{c}{B} \\ \hline \mathbb{O} & B'' & B' \end{array}\right) x = \left(\begin{array}{c|c|c} A_+ & \multicolumn{2}{c}{B+\Delta} \\ \hline \mathbb{O} & B''+\Delta' & B''' \end{array}\right) x$$

Формальное описание:

Вход: n — число уравнений, m — число неизвестных, $n \leqslant m$.

Выход: $(\mathrm{E}^m, A, \mathcal{H})$.

1. Генерируем случайным образом числа $0 \leqslant q \leqslant n$, $0 \leqslant p < m-q$, $0 \leqslant t < m-q-p$ и последовательность $0 < k_1 < \dots < k_q = q+p+1$;

2. Генерируем случайным образом матрицу $B \in \{0,1\}_+^{q\times(m-q-p)}$, $B' \in \{0,1\}_+^{(n-q)\times(m-q-p-t)}$, $B'' \in \{0,1\}_+^{(n-q)\times t}$, которые удовлетворяют условиям $\forall j = 1,\dots,m-q-p-t \quad \sum\limits_{i=1}^{q} B_{i(t+j)} + \sum\limits_{i=1}^{n-q} B'_{ij} = 1, \forall j = 1,\dots,t \quad \sum\limits_{i=1}^{q} B_{ij} + \sum\limits_{i=1}^{n-q} B''_{ij} = 1$;

3. Генерируем случайным образом матрицу $B''' \in \{0,1\}^{(n-q)\times(m-q-p-t)}$, которая удовлетворяет условию $\forall j \quad \sum_i B'''_{ij} = 1$;

4. Генерируем случайным образом матрицу $\Delta \in \mathbb{Z}_+^{n\times(m-q-p)}$, которая удовлетворяет условию $\forall\, j \quad \Delta_{qj} > 0$;

5. Генерируем случайным образом матрицу $\Delta' \in \mathbb{Z}_+^{(n-q)\times t}$, которая удовлетворяет условию $\forall\, j \quad \sum_i \Delta'_{ij} > 0$;

6. Генерируем случайным образом матрицу $A_+ \in \mathbb{Z}^{q\times(q+p)}$, которая удовлетворяет условию $A' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1k_1} & \dots & a_{1(k_2-1)} & a_{1k_2} & \dots\dots\dots & a_{1(q+p)} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2k_2} & \dots\dots\dots & a_{2(q+p)} \\ \multicolumn{9}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$;

7. Генерируем случайным образом матрицу $E' \in \mathbb{Z}^{q\times(q+p)}$, которая удовлетворяет условию $E' = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\dots\dots\dots\dots} & 0 \\ \multicolumn{10}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

8. $\mathrm{E}^m(I^n) = \left(\begin{array}{c|c|c} E' & \multicolumn{2}{c}{B} \\ \hline \mathbb{O} & B'' & B' \end{array}\right)$, $A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_+ & \multicolumn{2}{c}{B+\Delta} \\ \hline \mathbb{O} & B''+\Delta' & B''' \end{array}\right)$;

9. С помощью обратного преобразования строим матрицу $\mathcal{H}$.

Пример приведения системы одАНЛДУ к виду (2)

Система одАНЛДУ

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 & = & 2x_2 + x_3 + 3x_4 \\ x_3 & = & 2x_4 + x_5 \\ x_4 + x_5 & = & 3x_2 + 2x_5 \end{array}\right.$$

Сумма уравнений системы

$$-x_1 + 4x_2 + 4x_4 + 2x_5 = 0$$

Исключаем уравнение 1 и неизвестную x_1

$$x_1 = x_2 + x_3 + 3x_4 = T_1(x_2, x_3, x_4, x_5)$$

Система одАНЛДУ после преобразования

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_3 & = & 2x_4 + x_5 \\ x_4 + x_5 & = & 3x_2 + 2x_5 \end{array}\right.$$

Сумма уравнений системы

$$3x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0$$

Исключаем уравнение 1 и неизвестную x_3

$$x_3 = 2x_4 + x_5 = T_2(x_2, x_4, x_5).$$

Система приведена к виду (2)

$$x_4 + x_5 \;\; = \;\; 3x_2 + 2x_5$$

Базис Гильберта последнего уравнения

$$\mathcal{H}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{array}{l} : x_2 \\ : x_4 \\ : x_5 \end{array}$$

Применяя правила для нахождения x_1 и x_3 получаем базис Гильберта

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Пример приведения системы одАНЛДУ к виду (3)

Система одАНЛДУ

$$\begin{cases} x_1 + x_3 & = & x_1 + 3x_3 \\ x_2 & = & x_2 + 5x_3 \\ x_4 & = & 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \end{cases}$$

Сумма уравнений системы

$$2x_1 + 3x_2 + 14x_3 - x_4 = 0$$

Исключаем уравнение 3 и неизвестную x_4

$$x_4 = 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = T_1(x_1, x_2, x_3)$$

Система одАНЛДУ после преобразования

$$\begin{cases} x_1 + x_3 & = & x_1 + 3x_3 \\ x_2 & = & x_2 + 5x_3 \end{cases}$$

Сумма уравнений системы

$$7x_3 = 0$$

Полагаем $x_3 = 0$ и исключаем x_3 из рассмотрения. Система приведена к виду (3)

$$\begin{cases} x_1 & = & x_1 \\ x_2 & = & x_2 \end{cases}$$

Базис Гильберта системы

$$\mathcal{H}^1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{array}{l} : x_1 \\ : x_2 \end{array}$$

Применяем правило для нахождения x_4 и получаем базис Гильберта для системы одАНЛДУ:

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$