Российская академия наук
Карельский научный центр

Институт прикладных математических исследований

Моделирование переговоров

Многие вещи нам непонятны не потому, что наши понятия слабы, но потому, что сии вещи не входят в круг наших понятий.

Козьма Прутков

д.ф-м.н., проф. Мазалов В.В.

Моделирование переговоров

Основные требования

1. Должны быть **сформулированы правила проведения переговоров**, которые не меняются на всем интервале времени
2. Должны быть **учтены интересы всех** переговаривающихся **сторон**
3. Принцип справедливости (равные **партнеры получают одинаково**)
4. Происходит "дисконтирование" выигрыша во времени
5. Переговоры должны заканчиваться

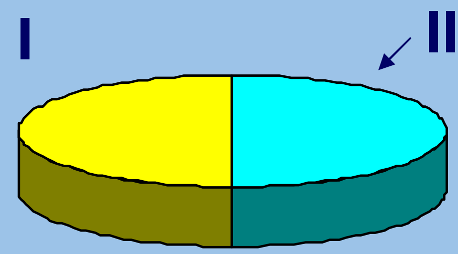
Моделирование переговоров

1. Два игрока

Два игрока делят торт на равные части. **Решение:** один из игроков делит, второй делает выбор.

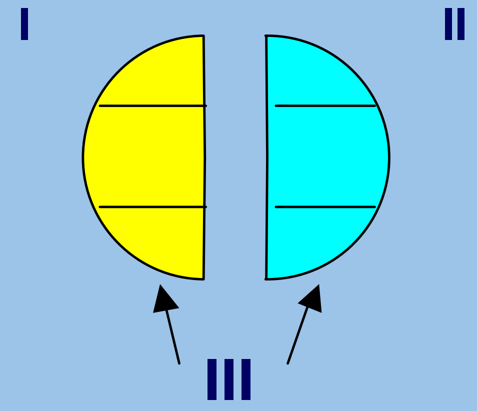
2. Три игрока

Первые два игрока делят как в п.1, затем каждый из них делит свой пирог на три равные части, приглашает третьего и последний выбирает понравившийся ему кусок.



Задача

о разделе пирога



Моделирование переговоров

Задача о разделе пирога

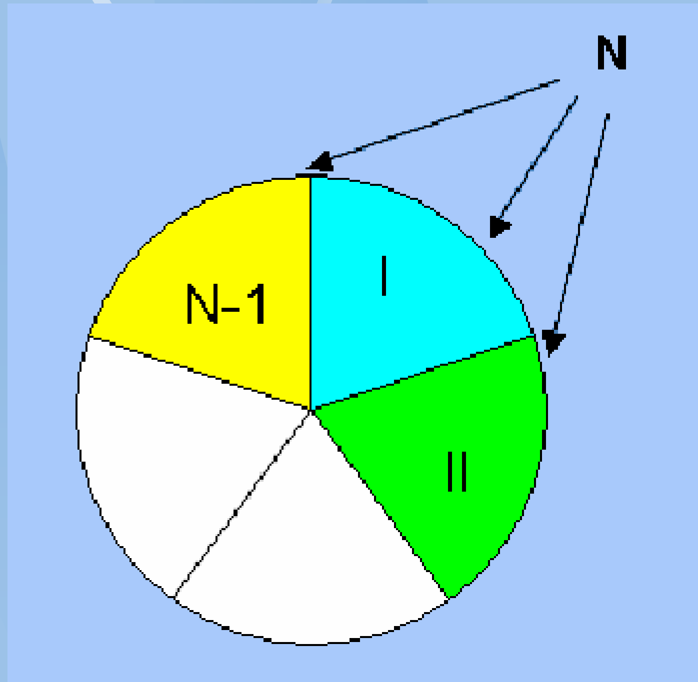
3. N игроков

Математическая индукция.

Предположим, мы можем разделить пирог на **N -1** частей.

Делаем это для **N –1** игроков.

Затем каждый из этих игроков делит пирог на **N** равных частей, приглашает **N-го** игрока и тот выбирает у каждого понравившийся ему кусок.



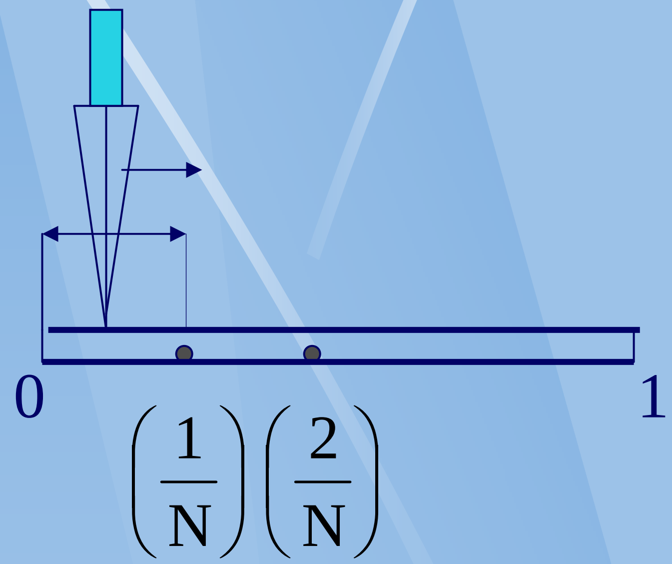
Моделирование переговоров

Задача о разделе пирога

4. Схема Гарднера, N игроков

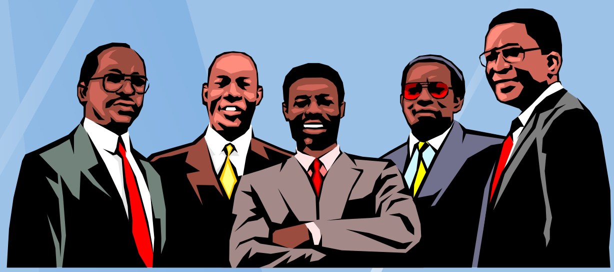
Вдоль пирога движется нож.

Решение: Первый, кто останавливает движение ножа, получает данную часть, остальные игроки делят оставшуюся часть.

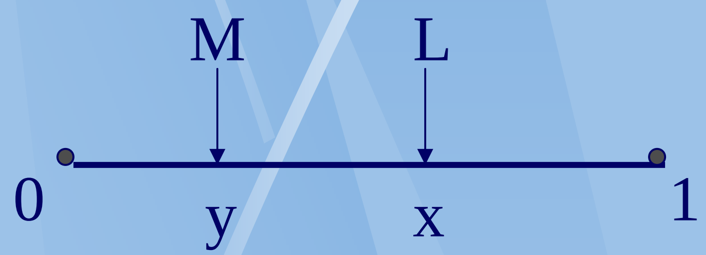


Арбитражные процедуры

1. Постановка задачи



Рассматривается антагонистическая игра следующего вида. Два игрока **L** и **M**, трактуемые как **Коллектив рабочих (Labour) и Управляющие (Management)** соответственно, договариваются об увеличении заработной платы. **Игрок L** делает предложение **x**, а **игрок M** предложение **y**. Мы будем предполагать здесь, что **x** и **y** произвольные действительные числа из интервала **[0,1]**.

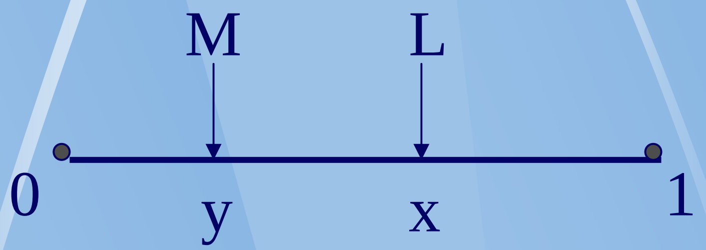


Если **x ≤ y**, конфликта нет, и игроки договариваются о выигрыше, например, равном **(x+y)/2**. Если же **x > y**, **для разрешения конфликта стороны обращаются к арбитру (A).**

Существуют различные **схемы арбитража**. Мы рассматриваем в данной работе схему так называемого **арбитража по последнему предложению**.

Арбитражные процедуры

Обозначим **мнение арбитра** через $\alpha \in [0,1]$. Тогда из двух предложений **x** и **y** проходит то предложение, которое ближе к точке α. Если **α = a** фиксировано, то **равновесием** является пара стратегий **(a,a)**. Однако, в случае, когда мнение арбитра может измениться, задача становится нетривиальной.



Пусть α случайная величина и стратегиями игроков **L** и **M** являются произвольные числа **x,y** $\in$ **[0,1]**. **Функция выигрыша** в данной игре имеет вид **$H(x,y)=EH_\alpha(x,y)$**, где:

$$H_\alpha(x,y) = \begin{cases} (x+y)/2, & \text{если} \quad x \le y \\ x, & \text{если} \quad x > y, |x-\alpha| < |y-\alpha| \\ y, & \text{если} \quad x > y, |x-\alpha| > |y-\alpha| \\ \alpha, & \text{если} \quad x > y, |x-\alpha| = |y-\alpha| \end{cases}$$

Арбитражные процедуры

2. Непрерывный случай

Пусть α имеет функцию распределения **F(z) = P {α < z }.**

Если **x > y**, то значение величины α будет меньшим **(x+y)/2** с вероятностью **P {α < (x+y)/2} = F ((x+y)/2)** и тогда выигрыш равен **y**, и большим полусуммы с вероятностью

$$P\{\alpha \geq (x+y)/2\} = 1 - F((x+y)/2)$$

и тогда выигрыш равен **x**.

Функция выигрыша:

$$H(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{2}, \text{ если } y \geq x; \\ yF(\frac{x+y}{2}) + x(1 - F(\frac{x+y}{2})), \text{ если } y < x. \end{cases}$$

Арбитражные процедуры

Теорема. Пусть функция **F(z)** монотонно возрастает на отрезке **[0;1]** и имеет дифференцируемую плотность **f(z)** и пусть для всех $z \in [0;1]$ выполняется неравенство $f^2(z) > |f'(z)|$. Тогда **игра имеет решение**:

$x^* = F(0.5) + 1/(2 f(F(0.5)))$, $y^* = F(0.5) - 1/(2 f(F(0.5)))$, $v = F(0.5)$.

Перечислим несколько примеров с разными функциями **F(z)** с указанием **оптимальных стратегий и выигрышей**.

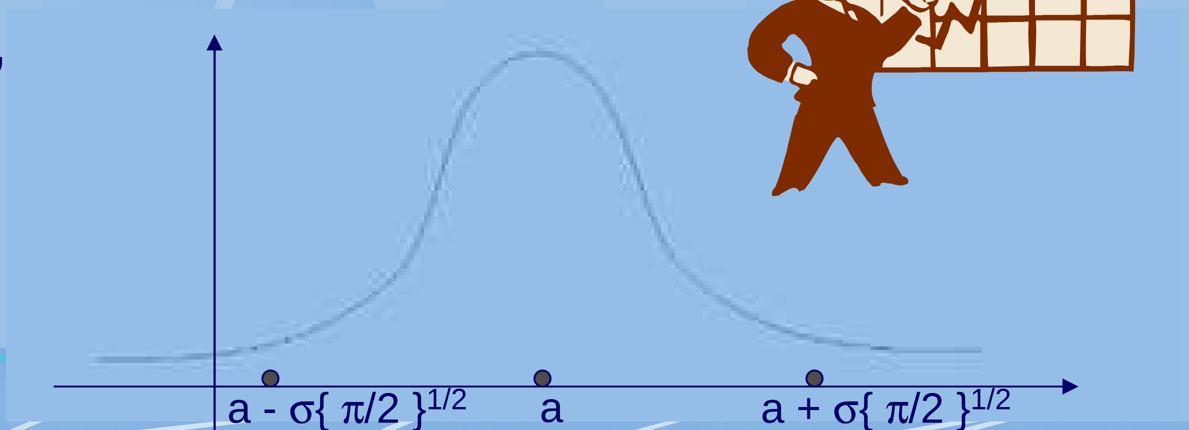
1. **F(z)=z. Тогда x*=1, y*=0, v=0.5**

2. Нормальное распределение **N (a, σ)**:

$x^* = a + \sigma \{ \pi/2 \}^{1/2}$,

$y^* = a - \sigma \{ \pi/2 \}^{1/2}$,

$v = a$.

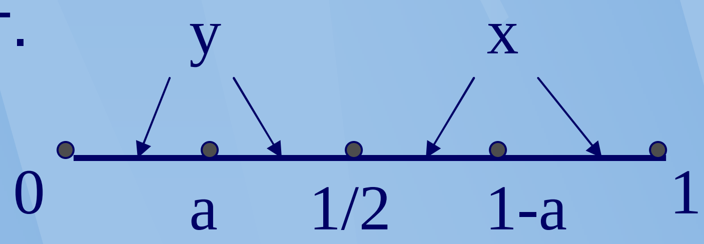


Арбитражные процедуры

3. Дискретный случай

Пусть α случайная величина, принимающая значения **а** и **1-а** с одинаковыми вероятностями **р=1/2**. В силу симметрии задачи значение данной игры равно **1/2**, и оптимальные стратегии должны быть симметричными относительно середины интервала **[0,1]**. Поэтому достаточно построить **оптимальную стратегию** одного из игроков, например **М**. Для малых **а** равновесие состоит из чистых стратегий.

Теорема 1. Если **а** $\leq$ **{1/4}** оптимальными стратегиями игроков являются **x=1** и **y=0**. В случае **а > {1/4}** равновесия в чистых стратегиях не существует.



Арбитражные процедуры
3. Дискретный случай

Обозначим через **F(y)** **смешанную стратегию** игрока **M.** Предположим, что носитель распределения **F** лежит в левой половине отрезка **[0,1].**

Теорема 2. Если **{1/4} < a** ≤ z^2, где **z** - золотое сечение интервала **[0,1],** то оптимальные стратегии в арбитражной игре имеют **вид** :

$$G(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 2a-b] \\ 1-(1-\sqrt{a})/\sqrt{x-a}, & x \in (2a-b, 2a] \\ 2-1/\sqrt{a}, & x \in (2a, 1-b] \\ 2-(1/\sqrt{a}-1)/\sqrt{x+a-1}, & x \in (1-b, 1] \end{cases}$$

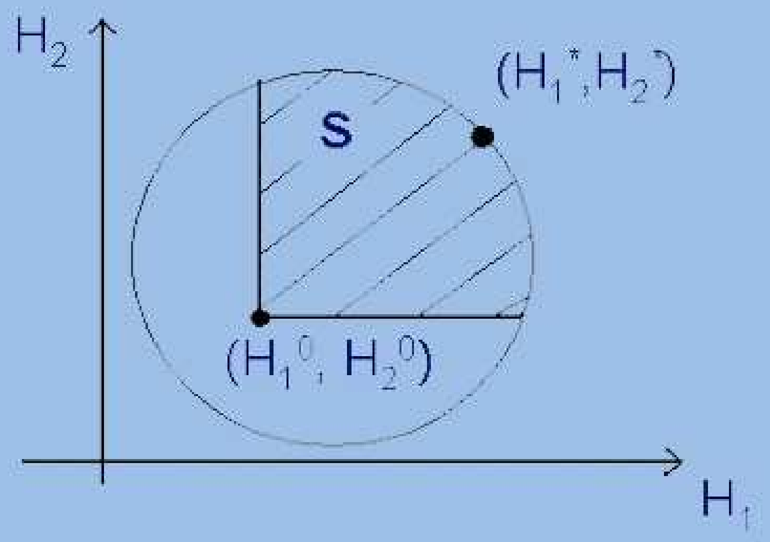
$$F(y) = \begin{cases} -1+(1/\sqrt{a}-1)/\sqrt{a-y}, & y \in [0, b] \\ -1+1/\sqrt{a}, & y \in (b, 1-2a] \\ (1-\sqrt{a})/\sqrt{1-a-y}, & y \in (1-2a, 1-2a+b] \\ 1, & y \in (1-2a+b, 1] \end{cases}$$

Арбитражные процедуры
3. Дискретный случай

Замечание. Интересно отметить, что **оптимальное правило в данной арбитражной игре определяется с помощью золотого сечения**. Само оптимальное правило предписывает игроку **M** сосредотачивать свои предложения на интервале **[0, 1/2]**, а игрок **L** должен делать предложения в интервале **[1/2,1]**. Тем самым, **не допускается ситуаций, когда предложения игрока M превышают предложения L**. Заметим также, что среднее значение распределений **F** и **G** совпадает с серединой интервала носителя распределения.

Решение Нэша
(Нобелевская премия 1994 г. по экономике)

Аксиомы Нэша



A1. Индивидуальная разумность

$(H_1^*, H_2^*) \geq (H_1^0, H_2^0)$.

A2. Допустимость

$(H_1^*, H_2^*) \in S$

A3. Оптимальность по Парето

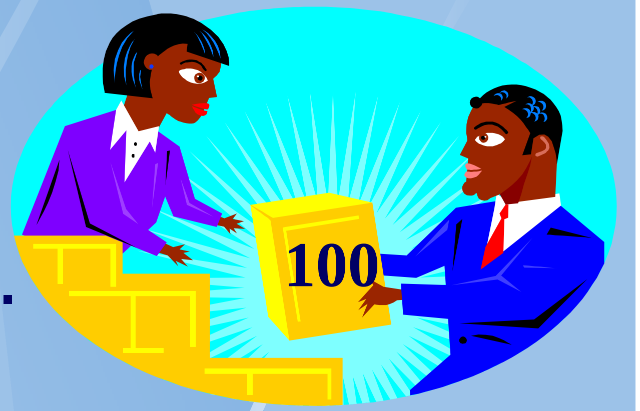
A4. Независимость от посторонних альтернатив

Если **T** - подмножество **S**, то решение задачи с переговорным множеством **S** является также решением задачи с переговорным множеством **T**.

A5. Независимость от линейного преобразования

A6. Симметрия

Решение Нэша



Теорема. Решение по Нэшу есть решение оптимизационной задачи $\max(H_1-H_1^0)(H_2-H_2^0)$.

Пример. Два игрока делят 100 рублей.

Игрок 1 имеет неограниченный капитал, игрок 2 всего 100 рублей.

Полезность суммы денег пропорциональна логарифму.

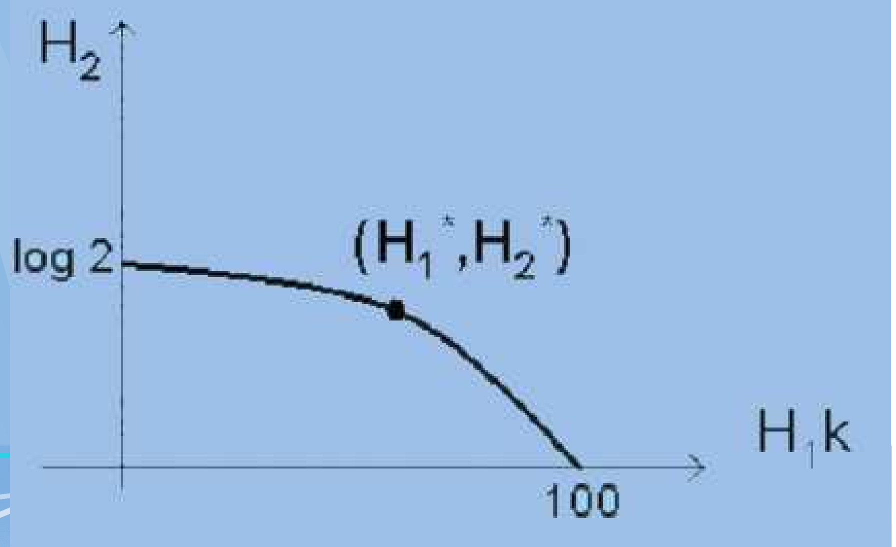
$$H_1(x)= \log(K+x)-\log(K) = \log (K+x/K) \approx x/K$$

$$H_2(x)= \log(100+100 -x)-\log(100) = \log (2-x/100)$$

Отсюда переговорное множество:

$$H_2(x)=\log(2-H_1K/100)$$

Решение. $x_1^* \approx 54{,}4$; $1-x_1^* \approx 45{,}6$



Задача управления биоресурсами
Модель динамической игры

Модель динамической игры управления биоресурсами (выловом рыбы). В игре участвует **Центр (Государство)**, которое назначает долю запретной для вылова (заповедной) части водоема, и **Игроки** (рыболовецкие артели) производящие вылов биоресурсов. Каждый из игроков принимает решение независимо, руководствуясь максимизацией своей прибыли от продажи выловленной рыбы. В традиционной постановке задачей центра является **регулирование вылова путем введения квот на вылов рыбы**.

В данной работе задача центра – **выбор оптимальной доли заповедной территории для поддержания стабильного развития популяции в водоеме** в долгосрочной перспективе и определение возможного вылова, достаточного для удовлетворения спроса.

Выделение охраняемой территории может быть удобнее для реализации природоохранной политики в реальных условиях.

Задача управления биоресурсами
Игровая модель для одного участника

Рассматривается центр, который определяет долю заповедной части водоема, обозначенную **s**, $0 \le s \le 1$. Часть, на которой вылов разрешен, соответственно равна **1-s**. Рассматривается стратегия игрока, который использует ресурс рыбы на протяжении **T** периодов времени.

Динамика развития рыбной популяции с учетом вылова описывается уравнением:

$$x'(t) = F(x(t)) - qE(t)(1 - s(t))x(t), \quad 0 \le t \le T, \; x(0) = x_0$$

Где $x(t) \ge 0$ – **размер популяции** в период **t**; **F** – **функция развития популяции**; $E(t) \ge 0$ – **рыболовецкие усилия артели**, измеряемые в количестве кораблей, участвующих в ловле в период **t**; **s(t)** – **доля запретной для вылова (заповедной) части водоема**; $q > 0$ – **коэффициент возможного вылова** на единицу рыболовецких усилий артели.

Задача управления биоресурсами

Численное моделирование

Один игрок при постоянной доле запретной для вылова (заповедной) части водоема.

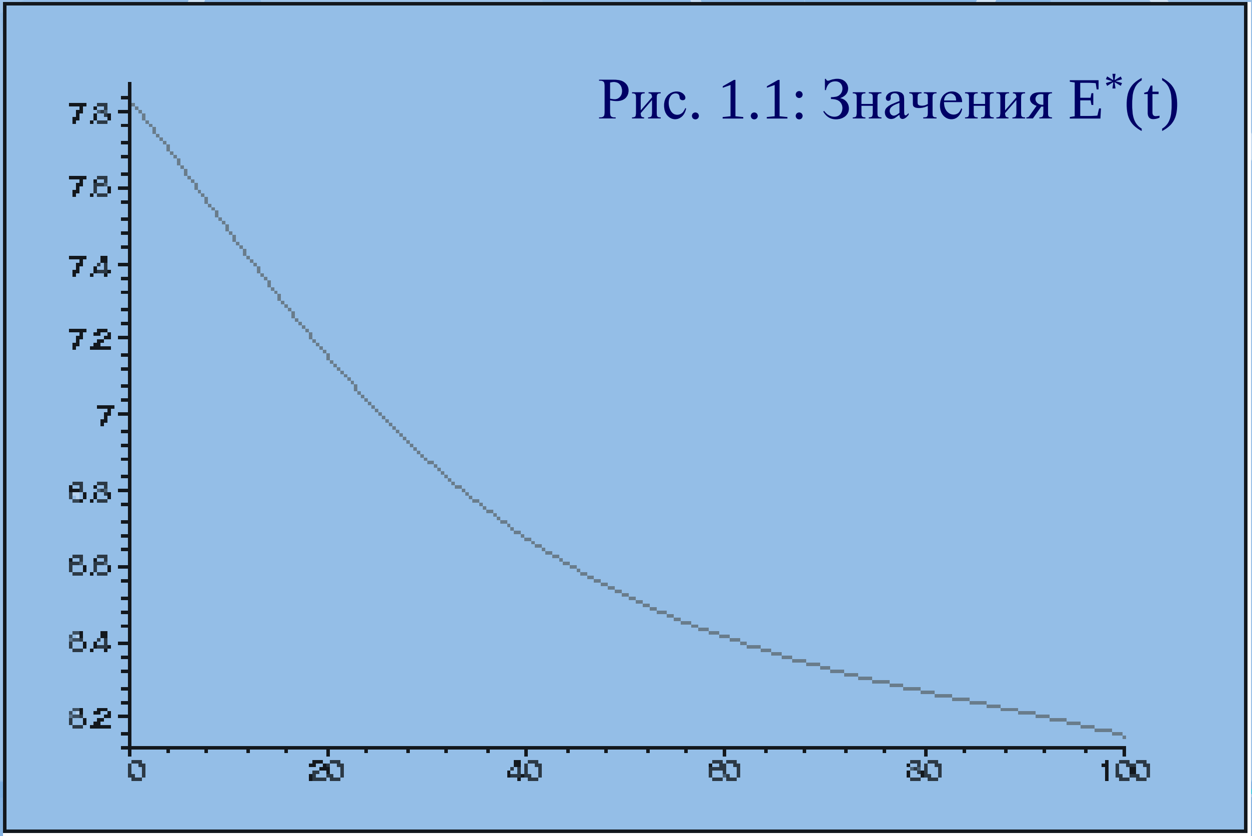
Моделирование произведено для следующих значений:

коэффициент внутреннего роста	$\mathbf{r} = 0.06$
коэффициент дисконтирования	$\rho = 0.02$
	$\mathbf{p} = 6000$
затраты на вылов для одного судна	$\mathbf{c_0} = 500000$
максимальная емкость природного объекта	$\mathbf{K} = 300000$
	$\mathbf{k} = 0.8$
коэффициент возможного вылова на единицу рыболовецких усилий артели	$\mathbf{q} = 0.002$
	$\alpha = 0.02$
период времени, на протяжении которого используется ресурс рыбы	$\mathbf{T} = 100$

Задача управления биоресурсами

Численное моделирование

Оптимальное значение E(t) - рыболовецких усилий артели, измеряемых в количестве кораблей, участвующих в ловле при начальном размере популяции **x(0)**=150000 и отсутствии заповедной зоны **(s(t)=0, t $\in$ [0,T])**



Из рисунка видно, что **число судов**, участвующих в ловле, **рационально уменьшать**, на рассматриваемом промежутке времени с 8 до 6 **…**

Задача управления биоресурсами

Численное моделирование

… при этом, **размер популяции возрастет** с 150000 до 230000 **(Рис. 1.2)** и **…**

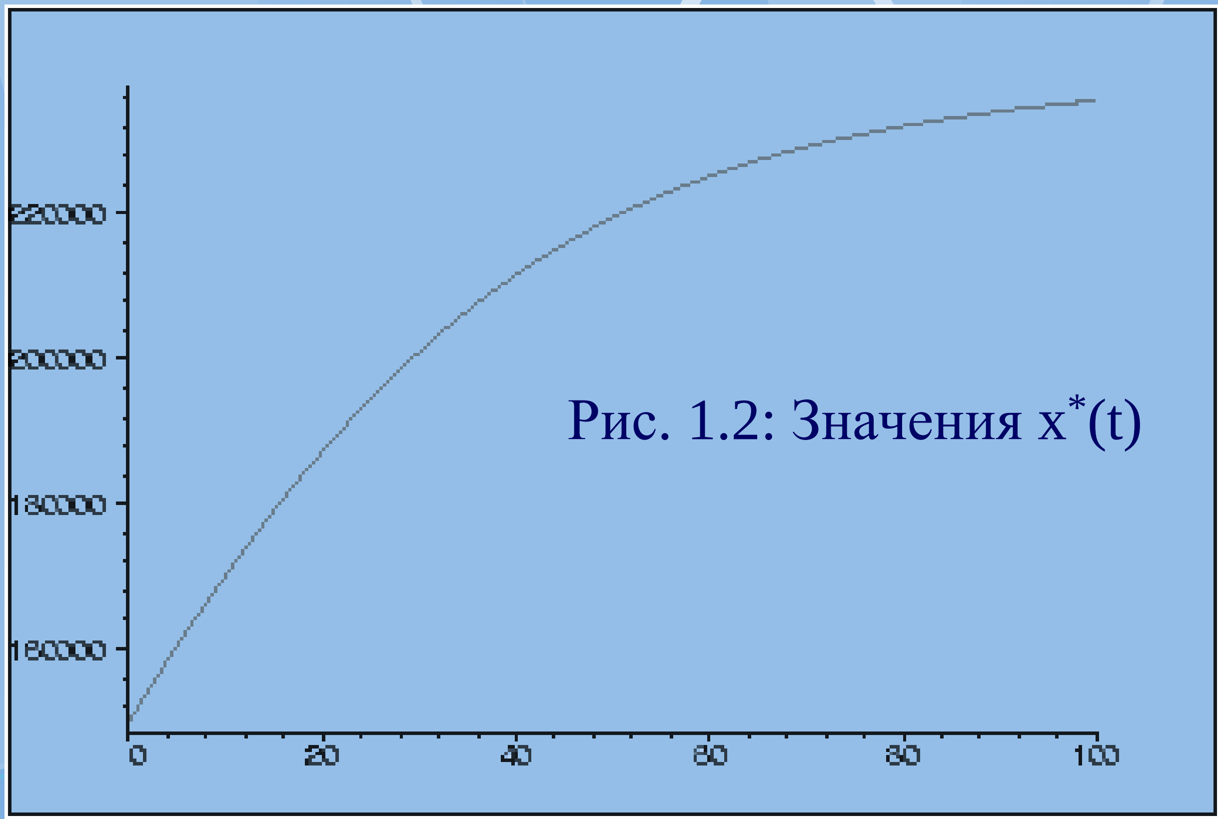


Рис. 1.2: Значения $x^{*}(t)$

Задача управления биоресурсами

Численное моделирование

… и **вылов также будет расти** с 2400 до 2900 особей в единицу времени **(Рис. 1.3)**. Выигрыш игрока при оптимальном поведении составит **J**=310903428.6. Если размер популяции, оптимальной для воспроизводства, примем равным $\overline{x}$ =180000, то затраты центра на восстановление составят **I$_1$**= - 15357631870

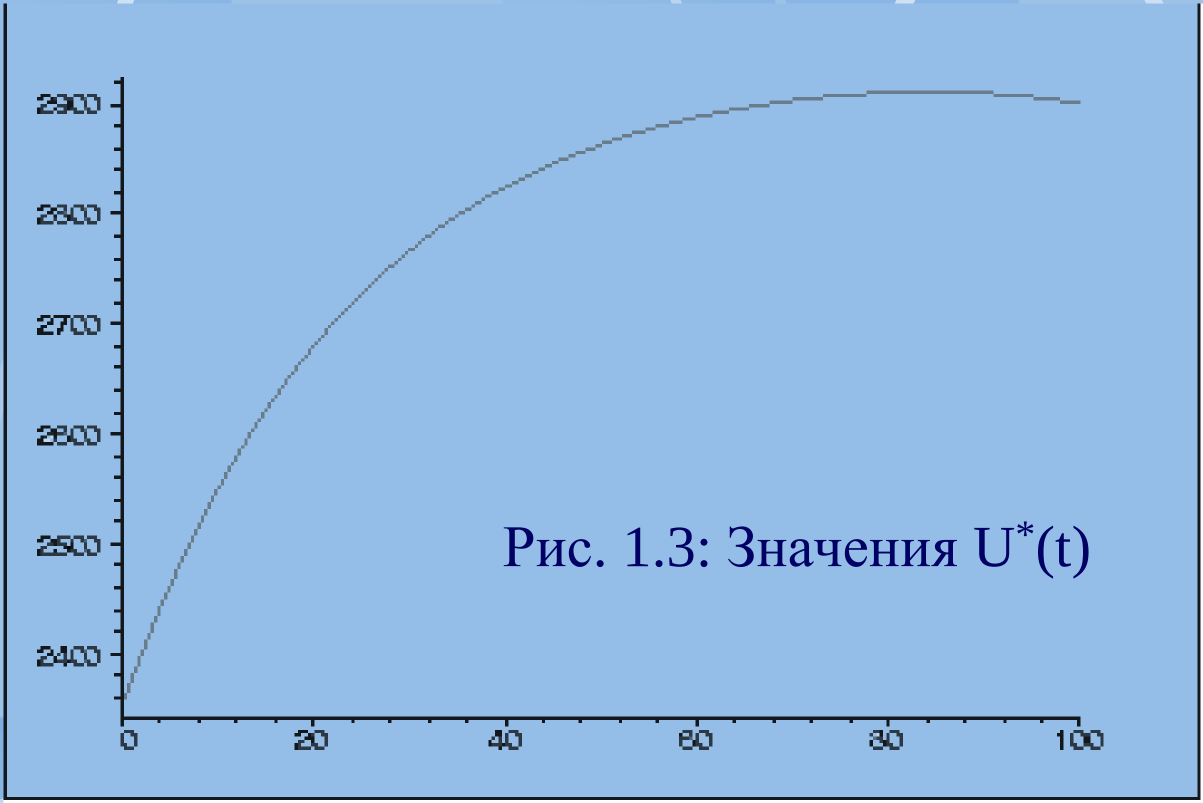


Рис. 1.3: Значения $U^*(t)$

Задача управления биоресурсами

Численное моделирование

Теперь предположим, что **центр выделил некоторую заповедную зону**, постоянную во времени **($s(t)=0.4$, $t \in [0,T]$)**. Оптимальное значение **$E^*(t)$** в данном случае будет иметь вид, изображенный на **Рис. 2.1**. Начиная с девяти судов, участвующих в ловле, первые 10 периодов число судов растет, а затем падает до 8.

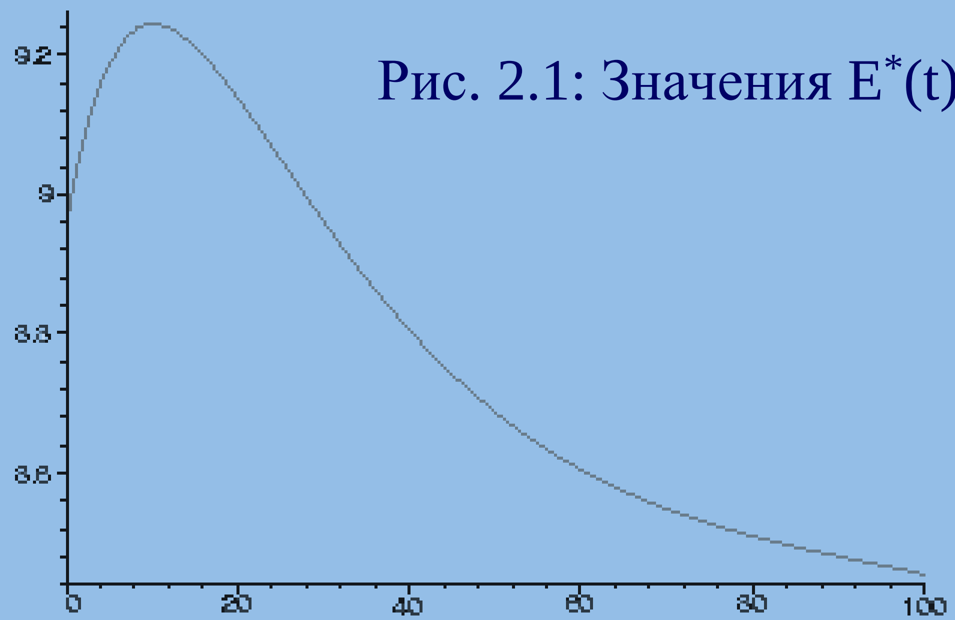


Рис. 2.1: Значения $E^*(t)$

Задача управления биоресурсами
Численное моделирование

При этом размер популяции увеличится еще больше по сравнению с предыдущим случаем – с 150000 до 250000 особей (**Рис. 2.2)**, а вылов будет увеличиваться с 1600 до 2500 особей (**Рис. 2.3)**, что немного меньше, чем в предыдущем случае. **Выигрыш игрока уменьшится J**=221247734.8, и при том же. параметре $\bar{x}$ = 180000, **затраты центра на восстановление популяции также уменьшатся** I_1= -254620482600.

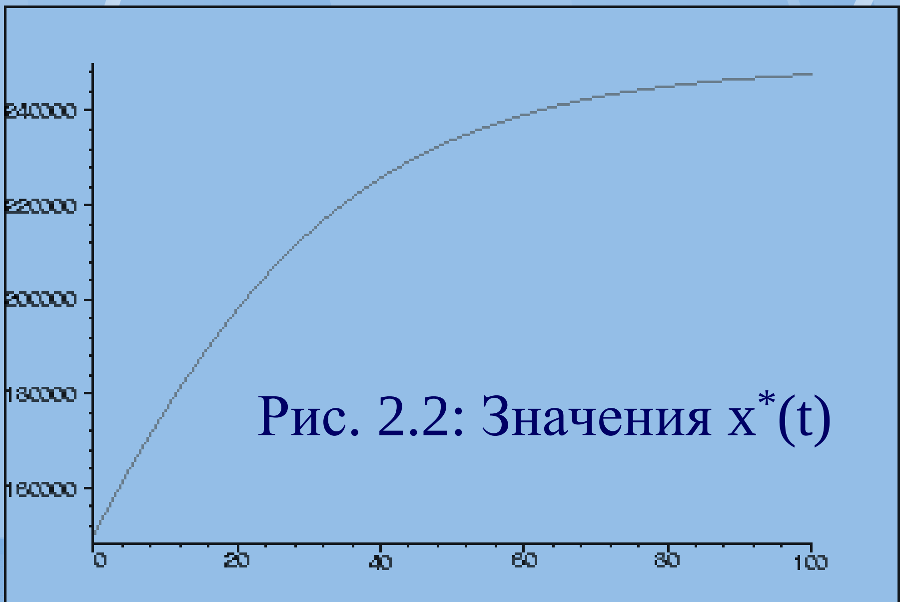


Рис. 2.2: Значения $x^*(t)$

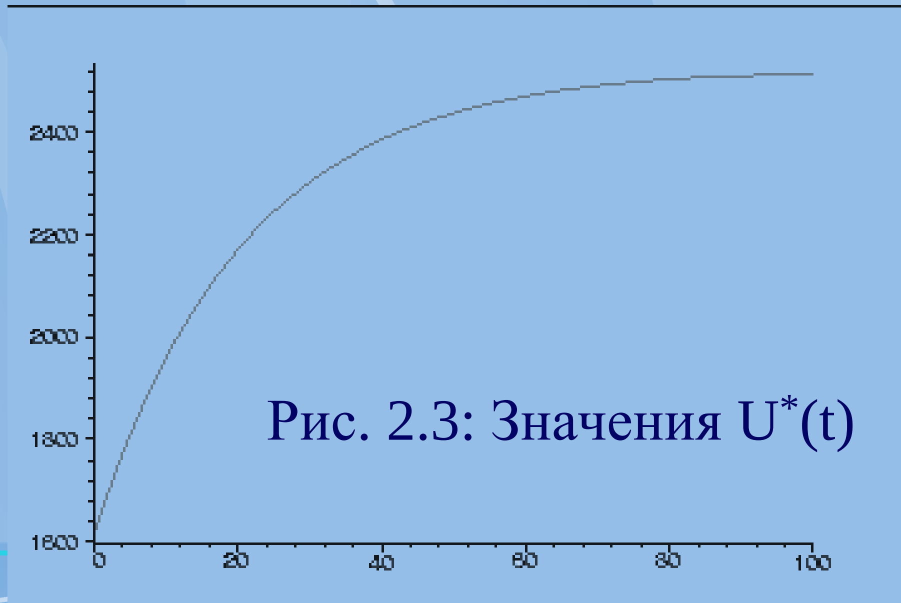


Рис. 2.3: Значения $U^*(t)$

Задача управления биоресурсами
Численное моделирование

Таким образом, **меняя значение s(t) – площадь заповедной зоны, центр и игрок получают различные выигрыши**. Для разрешения данного конфликта может быть использована арбитражная схема Нэша или ее модификация схема Калаи-Смородинского. В общем случае значение **s(t)** может быть произвольной функцией. При рассмотрении задачи, когда **центр может изменить размер территории вылова лишь один раз в произвольный момент времени** -

В случае с одним игроком оптимальным является отсутствие запретной для вылова территории на промежутке времени от 0 до 95 и охрана 70% территории в самом конце периода эксплуатации ресурса.

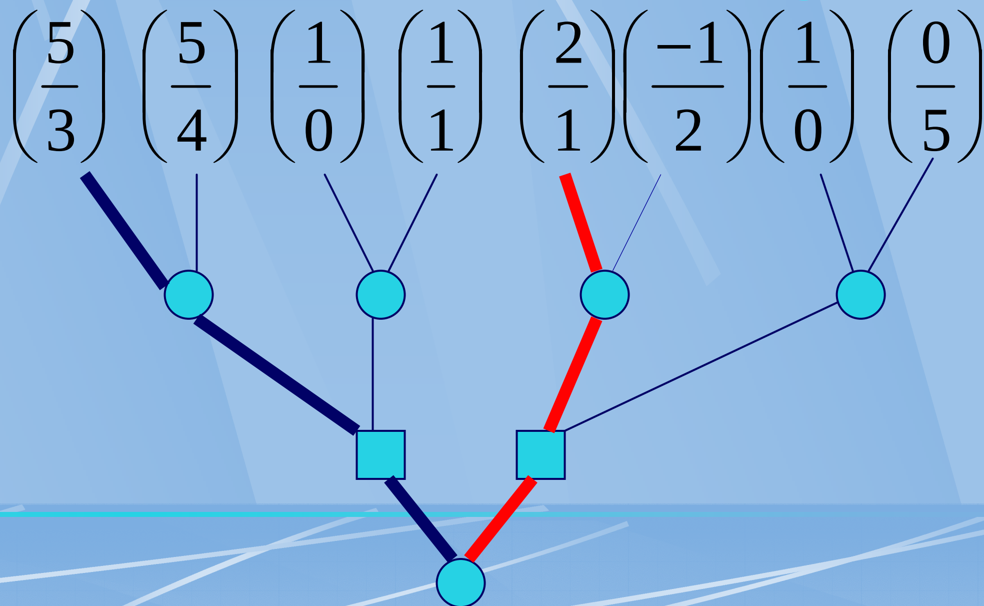
В случае двух участников – оптимально отсутствие заповедной зоны на промежутке времени от 0 до 86 и охрана 40% территории в оставшийся период эксплуатации природного ресурса или увеличение площади охраняемой зоны с 30% до 50% в момент времени t* = 19

Переговоры в развернутой форме

Переговоры можно представить деревом игры.

1). Игроки благожелательно относятся друг к другу.
Равновесие дает выигрыши (2,1).

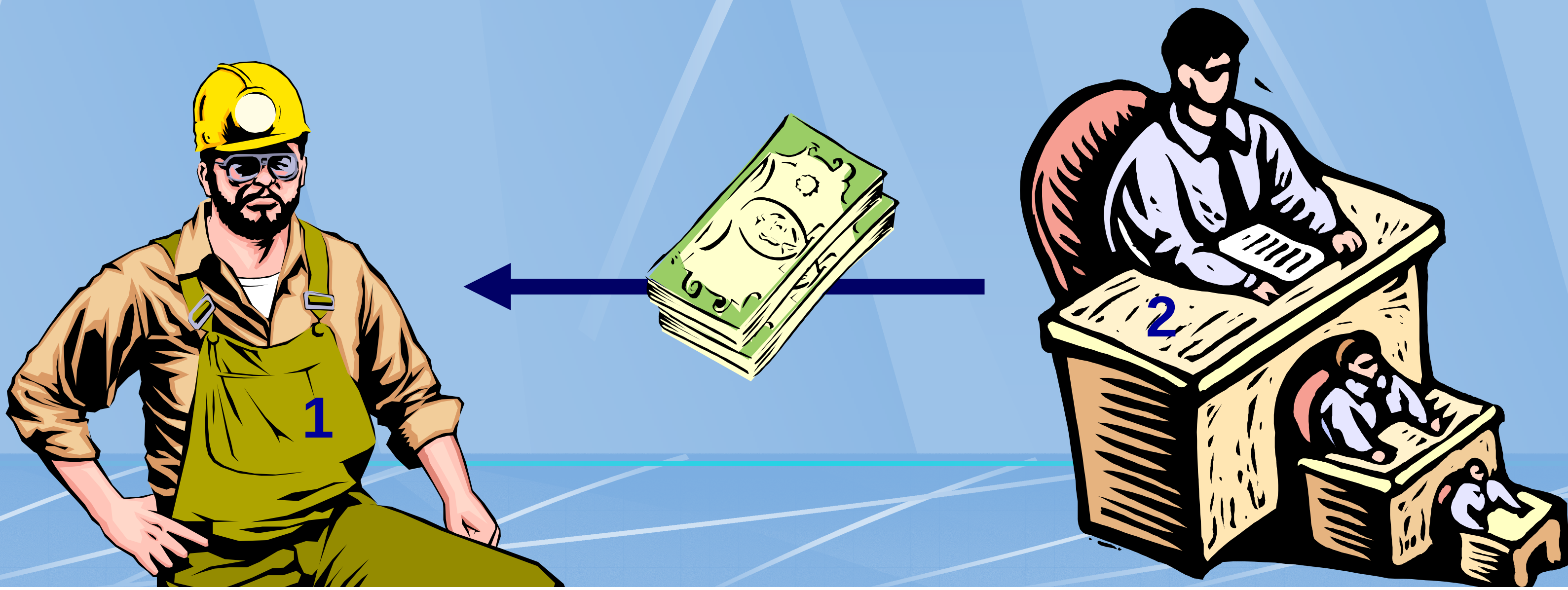
2). Относятся неблагожелательно.
Равновесие дает выигрыши (5,3).



Переговоры со случайными предложениями
Постановка задачи

Рассматривается модель переговоров со случайными предложениями, моделирующая **спор о зарплате между Профсоюзом (игрок 1)** и **Администрацией (игрок 2)**
Игрок 1 заинтересован максимизировать зарплату, игрок 2 - минимизировать ее значение.

Переговоры проводятся на временном интервале **[0,n]**, в течение которого решение должно быть принято.



Переговоры со случайными предложениями

Постановка задачи

Пусть α_i, **i=1,2,..., n** - случайные предложения в момент **i**. После поступления предложения игроки могут либо **согласиться** с ним, **либо подождать более лучшего**. Если оба игрока принимают предложение α_i, это и есть значение игры.

Если **один игрок принимает, другой - нет**, выбор делается в пользу отвергающей стороны, т.е. проходит решение $\alpha_i \wedge 1- \alpha_i$ если **A-R**, и $\alpha_i \vee 1- \alpha_i$ если **R-A**, где $\wedge$ $\vee$ обозначает максимум и минимум. Если **оба игрока отвергают предложение**, игра продолжается и стороны переходят к следующему шагу.

Задача - **найти оптимальные стратегии игроков**.

Можно ввести дисконтирование δ, $0 < \delta \leq 1$.

Переговоры со случайными предложениями
Решение игры

Пусть $\mathbf{v_k}$ значение игры, если осталось еще **k** периодов.

Уравнение оптимальности $\mathbf{v_k=E\{val\ H_k(\alpha)\}}$,
где $\mathbf{val\ H_k(\alpha)}$ - значение матричной игры:

$$H_k(\alpha)=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} A & R \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\wedge 1-\alpha \\ \alpha\vee 1-\alpha & \delta V_{k-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

и граничное условие $\mathbf{v_0=0}$.

Переговоры со случайными предложениями
Решение игры

Теорема 1. *Для любого* $k = \overline{1,n}$ *оптимальные стратегии имеют вид*

$$I : \begin{cases} A, & \text{если } \delta v_{k-1} < \alpha < 1 - \delta v_{k-1}, \\ R, & \text{если } \alpha \leqslant \delta v_{k-1} \text{ если } 1 - \delta v_{k-1} \leqslant \alpha, \end{cases} \qquad II : R.$$

Значение игры удовлетворяет рекуррентным соотношениям $v_k = (\delta v_{k-1})^2 + 0.25$ *и* $v_k < 0.5$.

Теорема 2. $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \dfrac{1 - \sqrt{1-\delta^2}}{2\delta^2}$.

Теорема 3. *Значение игры равно* $\mathsf{E}_n\tau = 1 + \sum\limits_{t=1}^{n-1} \prod\limits_{r=1}^{t} \{2\delta v_{n-r}\}$.

Теорема 4. $\mathsf{E}_{n+1}\tau = 1 + 2\delta v_n \mathsf{E}_n\tau$ *and* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathsf{E}_n\tau = \dfrac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2} - (1-\delta)}$.

Если $\delta = 1$ предел $\mathsf{E}_n\tau$ равен $+\infty$. В этом случае можно показать $\mathsf{E}_n\tau \sim \dfrac{n}{3}$.

Переговоры со случайными предложениями

Численные результаты

Значение игры v_n и предельные значения V для различных δ и n.

	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.2$	$\delta = 0.3$	$\delta = 0.4$	$\delta = 0.5$	$\delta = 1$
v_1	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
v_2	0.250625	0.2525	0.255625	0.26	0.265625	0.3125
v_3	0.250628	0.25255	0.255881	0.260816	0.267639	0.347656
v_4	0.250628	0.252551	0.255893	0.260884	0.267908	0.370865
v_5	0.250628	0.252551	0.255893	0.26089	0.267944	0.387541
v_6	0.250628	0.252551	0.255893	0.26089	0.267948	0.400188
v_7	0.250628	0.252551	0.255893	0.26089	0.267949	0.41015
v_8	0.250628	0.252551	0.255893	0.26089	0.267949	0.418223
v_9	0.250628	0.252551	0.255893	0.26089	0.267949	0.424911
v_{10}	0.250628	0.252551	0.255893	0.26089	0.267949	0.430549
V	0.250628	0.252551	0.255893	0.26089	0.267949	0.5

Переговоры со случайными предложениями

Численные результаты

Значение игры $E_n\tau$ и предельные значения E.

n \ δ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1.05	1.1	1.15	1.2	1.25	1.3	1.35	1.4	1.45	1.5
3	1.05277	1.111	1.176	1.25	1.332	1.425	1.53	1.65	1.785	1.937
4	1.05277	1.112	1.181	1.261	1.357	1.473	1.618	1.802	2.038	2.347
5	1.05277	1.112	1.181	1.263	1.363	1.491	1.659	1.891	2.228	2.741
6	1.05277	1.112	1.181	1.2637	1.365	1.497	1.677	1.941	2.366	3.124
7	1.05277	1.112	1.181	1.2637	1.366	1.499	1.685	1.969	2.465	3.501
8	1.05277	1.112	1.181	1.2637	1.366	1.5	1.688	1.984	2.535	3.872
9	1.05277	1.112	1.181	1.2637	1.366	1.5	1.689	1.992	2.583	4.238
10	1.05277	1.112	1.181	1.2637	1.366	1.5	1.69	1.996	2.615	4.602
E	1.05277	1.11237	1.18139	1.26376	1.36603	1.5	1.69024	2.	2.67945	$+\infty$

Переговоры с лотереей

Пусть (X_i, Y_i), **i=1,2,...,n** случайные предложения. На каждом шаге **игроки I и II** могут либо принять **(A)** либо отвергнуть **(R)** предложение.

Если оба игрока **принимают** **i-е** предложение, **игра заканчивается** с выигрышами: X_i для **игрока I** и Y_i для **игрока II**. Если оба игрока **отвергают** **i-е** предложение, они **переходят** к **(i+1)**-шагу.

Пусть (u_n, v_n) значение игры Γ_n, если осталось еще **k** периодов.

Уравнение оптимальности

$$(u_n, v_n) = E\Big[eq.val.\ M_n(X,Y)\Big] \qquad (1)$$

$$M_n(x,y) = \begin{array}{c|cc} & R & A \\ \hline R & u_{n-1}, v_{n-1} & pu_{n-1} + \bar{p}x, pv_{n-1} + \bar{p}y \\ A & px + \bar{p}u_{n-1}, py + \bar{p}v_{n-1} & x, y \end{array} \qquad (2)$$

$$(n \geq 1; u_0 = v_0 = 0).$$

Переговоры с голосованием

Рассматривается **многошаговая итерационная игра** со случайными предложениями **X_i, i=1,…n**.

Каждый из игроков на **k**-ом шаге может принять или отвергнуть предложение, которое ему поступило. После того, как все игроки сделали свой выбор, считается число игроков которые приняли или отвергли свои предложения. Если число игроков отвергших предложения превышает число игроков принявших предложения - то игра продолжается, и мы переходим к **(k-1)**-му шагу. Иначе – игра останавливается, и каждый из игроков получает то, что выпало ему на **k**-ом шаге. На нулевом шаге игра прекращается и все игроки получают выигрыш равный нулю. **Задача каждого из игроков - максимизировать свой выигрыш**.

Переговоры с голосованием

Теорема: В **игре n лиц** значение игры удовлетворяет соотношению:

$$H_k^n = H_{k-1}^n + (1-H_{k-1}^n)^{[\frac{n}{2}]+1}\Big(\frac{1}{2}\binom{n-1}{[\frac{n}{2}]}(1-H_{k-1}^n)(H_{k-1}^n)^{n-1-[\frac{n}{2}]} + (\frac{1}{2} - H_{k-1}^n) \times P(H_{k-1}^n)\Big)$$

где: $$P(x) = \binom{n-1}{[\frac{n}{2}]+1} x^{n-2-[\frac{n}{2}]} + \binom{n-1}{[\frac{n}{2}]+2} x^{n-3-[\frac{n}{2}]}(1-x) + \cdots$$

$$+\binom{n-1}{n-2} x(1-x)^{n-3-[\frac{n}{2}]} + \binom{n-1}{n-1}(1-x)^{n-2-[\frac{n}{2}]}$$

Оптимальный выигрыш H_k^n

Число игроков n	Предел H_k^n
3	0.70711
5	0.65034
7	0.63808
9	0.60740

Литература

1. Chatterjee K. Comparison of arbitration procedures: Models with complete and incomplete information, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, vol. smc-11, no. 2, 1981, 101-109.

2. Crawford V.P. On compulsory arbitration schemes, J. Political Econ., vol. 87, 1979, 131-159.

3. Farber H.S., Katz H.C. Interest arbitration, outcomes and the inventives to bargain, Industrial, Labor Relations Rev., vol. 33, no. 1, 1979.

4. Karlin S. Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics, Pergamon Press, London, 1959.

5. Mazalov V.V., Zabelin A.A., Karpin A.A. Equilibrium in an arbitration game.- Proceedings of the 5-th International conference "Probabilistic methods in discrete mathematics", VSP, 2002.

6. Sakaguchi M. A time-sequential game related to an arbitration procedure, Math. Japonica, vol. 29, no. 3, 1984, 491-502.

7. Leitman G. Collective bargaining: a differential game, J. Opt. Th. Appl., vol. 11, 1973, 405-412.

Литература

1. J. Nash, The bargaining problem, Econometrica 18 (1950), 155--162.
2. V.P. Crawford, On compulsory arbitration schemes, J.Political Econ. 11 (1973), 131--159.
3. K. Chatterjee, Models with complete and incomplete information, IEEE Trans. SMC-11 (1981), 101--109.
4. G. Leitman, Collective bargaining: a differential game, J. Opt. Th. Appl. 11 (1973), 405--412.
5. V.V. Mazalov, A.A. Zabelin, Equilibrium in an arbitration procedure, Proc. of the Y Petrozavodsk International Conference "Probabilistic methods in discrete mathematics", VSP, 2002.
6. V.V. Mazalov, M.Sakaguchi, A.A. Zabelin, Multistage arbitration game with random offers, Game Theory and Applications 8, Nova Sci. Publ., N.Y., 2002, 95-106.
7. M. Sakaguchi, A Time-Sequential Game Related to an Arbitration Procedure, Math. Japonica 29, no.3 (1984), 491--502.

Литература

1. Clark C.W., Bioeconomic modelling and fisheries management, Wiley, New York, NY, 1985.
2. Ehtamo H., Hamalainen R.P., A cooperative incentive equilibrium for a resource management problem, J. of Economic Dynamics and Control, vol.17, 1993, 659--678.
3. Hamalainen R.P., Kaitala V., Haurie A., Bargaining on whales: A differential game model with Pareto optimal equilibria, Oper. Res. Letters, vol.3, no.1, 1984, 5--11.
4. Haurie A., Tolwinski B., Acceptable equilibria in dynamic games, Large Scale Systems, vol.6, 1984, 73--89.
5. Tolwinski B., Haurie A., Leitmann G., Cooperative equilibria in differential games, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol.119, 1986, 182--202.
6. Петросян А.А., Захаров В.В., Математические модели в экологии, изд-во СПГУ, 1997, 253 с.
7. Мазалов В.В., Реттиева А.Н., Об одной задаче управления биоресурсами, Обозрение прикладной и промышленной математики, 2002, т. 9, выпуск 2, 293-306

Спасибо
за внимание !!!